MODELO MULTIPLICATIVO PARA IMAGENES DE RADAR

A. - PROCESAMIENTO DE IMAGENES DE RADAR DISTRIBUCIONES ASOCIADAS AL MODELO MULTIPLICATIVO

1. RUIDO SPECKLE

El ruido Speckle es un tipo de contaminación propia de las microondas, como las señales de radar, producida por la interferencia de la señal con objetos de dimensiones comparables a la longitud de onda.

1.1.CASO MULTILOOK

Corresponde a una imagen resultante de superponer varias imágenes de la misma área.

1.1.1 Formato Complejo

Cada uno de los n looks tiene la forma

$$Y_C = Y_R + iY_I \qquad \text{(A.1.1)}$$

en que $(Y_R, Y_I) \sim N_2(0, \frac{1}{2}I_2)$, todos independientes

1.1.2. Formato Intensidad

La intensidad de una onda se define como el módulo de la onda en formato complejo. Físicamente corresponde a la energía que transporta la onda. La intensidad, cuando hay n looks, es el promedio de la intensidad de cada uno, lo que corresponde al promedio de los n módulos:

$$Y_I = \frac{1}{n}\left(\|Y_{C1}\|^2 + \|Y_{C2}\|^2 + \ldots + \|Y_{Cn}\|^2\right) \qquad \text{(A.1.2)}$$

en que Y_{Ci} tiene la forma (1). Por lo tanto

$$2\|Y_{Ci}\|^2 = 2Y_R^2 + 2Y_I^2 \sim \chi^2(2) = \Gamma(1, \tfrac{1}{2})$$

Luego

$$2nY_I \sim \chi^2(2n) = \Gamma(n, \tfrac{1}{2})$$

Pero el segundo parámetro es parámetro de escala, luego

$$Y_I \sim \Gamma(n, 2n\tfrac{1}{2})$$

de donde

$$Y_I \sim \Gamma(n,n) \tag{A.1.3}$$

1.1.3 Formato Amplitud

La amplitud se define como la raíz cuadrada de la intensidad. Físicamente es la magnitud de la altura de la onda. O sea,

$$Y_A = \sqrt{Y_I} \tag{A.1.4}$$

De (A.3), Y_A es una variable aleatoria gama (ver B, # 2)

$$Y_A \sim \Gamma^{\frac{1}{2}}(n,n) \tag{A.1.5}$$

1.2.CASO UN LOOK

Es un caso especial del caso multilook en que n=1. Reemplazando n por 1 en los resultados anteriores, se obtienen los siguientes.

1.2.1. Formato Complejo.

Como el caso Multilook, pero con una componente.

1.2.2. Formato Intensidad.

De (A.1.3) con $n = 1$

$$Y_I \sim \Gamma(1,1) = Exp(1) \tag{A.1.6}$$

1.2.3. Formato Amplitud.

La amplitud es una variable aleatoria raiz de una exponencial, que corresponde a una Rayleigh, ambas con parámetro 1 (ver B.3.1)

$$Y_A \sim \sqrt{Exp(1)} = R(1) \tag{A.1.7}$$

2. RETRODISPERSION

La retrodispersión es el reflejo de la onda, que contiene la información sobre la superficie sobre la que rebota. La onda se refleja en forma diferente, según el tipo de área iluminada. Se tistinguen tres tipos de área: Homogénea, como es el caso de una campo sembrado; heterogenea, como es el caso de un bosque; extermadamente homogénea, como una ciudad. La retrodispersión de estos tres tipos de áreas se modelan con variables aleatorias distintas.

2.1. AREAS HOMOGENEAS

Si el area iluminada por el radar es homogénea, la retrodispersión es una constante.

2.1.1. Formato Intensidad.

Sea β la constante correspondiente a la intensidad. La retrodispersión se denota

$$X_I \sim C(\beta) \tag{A.2.1}$$

2.1.2. Formato Amplitud.

$$X_A \sim C(\beta^{\frac{1}{2}}) \tag{A.2.2}$$

2.2. AREAS HETEROGENEAS

2.2.1. Formato Intensidad.

$$X_I \sim \Gamma(\alpha,\lambda) \tag{A.2.3}$$

2.2.2. Formato Amplitud.

Es una variable aleatoria raiz de gama, definida en la parte B, # 3, que equivale a una raiz de gauseana inversa generalizada $N^{-\frac{1}{2}}(\alpha,\gamma,\lambda)$, cuando el parámetro $\gamma \to 0^+$ (ver B.3.2).

$$X_A \sim \Gamma^{\frac{1}{2}}(\alpha,\lambda) = N^{-\frac{1}{2}}(\alpha, 0, \lambda) \tag{A.2.4}$$

2.3. AREAS EXTREMADAMENTE HETEROGENEAS

2.3.1. Formato Intensidad.

$$X_I \sim \Gamma^{-1}(\alpha,\gamma) \tag{A.2.5}$$

2.3.2. Formato Amplitud.

Es una variable aleatoria raiz de gama inversa, definida en la parte B, # 4, que equivale a una raiz de gauseana inversa generalizada $N^{-\frac{1}{2}}(\alpha,\gamma,\lambda)$, cuando el parámetro $\lambda \to 0^+$ (ver B.3.2).

$$X_A \sim \Gamma^{-\frac{1}{2}}(-\alpha,\gamma) = N^{-\frac{1}{2}}(\alpha, \gamma, 0) \tag{A.2.6}$$

3. SEÑAL RESULTANTE

Bajo el modelo multiplicativo, la señal resultante es el producto de la retrodispersión por el ruido.

$$Z = X \cdot Y$$

3.1. CASO MULTILOOK, AREAS HOMOGENEAS

3.1.1. Formato Intensidad.

$$Y_I \sim \Gamma(n,n) \quad \text{y} \quad X_I \sim C(\beta)$$

Como el segundo parámetro de la variable aleatoria gama es un parámetro de escala, entonces al multiplicarla por una constante β resulta una nueva gama, con segundo parámetro n/β.

$$Z_I \sim \Gamma(n, \tfrac{n}{\beta}) \qquad \text{(A.3.1)}$$

3.1.2. Formato Amplitud.

$$Y_A \sim \Gamma^{\frac{1}{2}}(n,n) \quad \text{y} \quad X_A \sim C(\beta^{\frac{1}{2}})$$

El segundo parámetro de la variable aleatoria raiz de gama tambien es un parámetro de escala, entonces al multiplicarla por una constante $\beta^{\frac{1}{2}}$ resulta una nueva gama, con segundo parámetro $n/\beta^{\frac{1}{2}}$.

$$Z_A \sim \Gamma^{\frac{1}{2}}(n, \tfrac{n}{\sqrt{\beta}}) \qquad \text{(A.3.2)}$$

pendiente:

Equivalentemente si $\alpha,\lambda \to \infty$ y $\gamma=0$, y además $\frac{\alpha}{\lambda} \to \beta_1$

$$Z_A = X_A \cdot Y_A \sim \Gamma^{\frac{1}{2}}(n, \tfrac{n}{\beta_1}) \qquad \text{(A.3.3)}$$

Pero también se tiene que si $-\alpha,\gamma \to \infty$ y $\lambda=0$, y además $\frac{\alpha}{\gamma} \to \beta_2$

$$Z_A \sim \Gamma^{-\frac{1}{2}}(n, n\beta_2) \qquad \text{(A.3.4)}$$

fin pendiente

3.2. CASO MULTILOOK, AREAS HETEROGENEAS

3.2.1. Formato Intensidad.

$$Y_I \sim \Gamma(n,n) \quad \text{y} \quad X_I \sim \Gamma(\alpha,\gamma)$$

entonces de (B)

$$Z_I \sim G_I(\alpha,\gamma,n) \tag{A.3.5}$$

3.2.2. Formato Amplitud.

$$Y_A \sim \Gamma^{\frac{1}{2}}(n,n) \quad \text{y} \quad X_A \sim \Gamma^{\frac{1}{2}}(\alpha,\gamma) = N^{-\frac{1}{2}}(\alpha,0,\gamma)$$

entonces por (B.7.2)

$$Z_A \sim K_A(\alpha,\gamma,n) \tag{A.3.6}$$

3.3. CASO MULTILOOK, AREAS EXTREMADAMENTE HETEROGENEAS

3.3.1. Formato Intensidad.

$$Y_I \sim \Gamma(n,n) \quad \text{y} \quad X_I \sim \Gamma^{-1}(\alpha,\gamma)$$

entonces de (B.10.2)

$$Z_I \sim G_I^0(\alpha,\gamma,n) \tag{A.3.7}$$

3.3.2. Formato Amplitud.

$$Y_A \sim \Gamma^{\frac{1}{2}}(n,n) \quad \text{y} \quad X_A \sim \Gamma^{-\frac{1}{2}}(\alpha,\gamma)$$

entonces de (B.9.2)

$$Z_A \sim G_A^0(\alpha,\gamma,n) \tag{A.3.8}$$

3.4. CASO UN LOOK, AREAS HOMOGENEAS

Son casos especiales de los anteriores, con n=1.

3.4.1. Formato Intensidad.

$$Y_I \sim \Gamma(1,1) = \mathrm{Exp}(1) \quad \text{y} \quad X_A \sim C(\beta)$$

entonces de (A.3.1),

$$Z_I \sim \Gamma(1,\tfrac{1}{\beta}) \tag{A.3.9}$$

3.4.2. Formato Amplitud.

$$Y_A \sim \text{Rayleigh}(1) \quad \text{y} \quad X_A \sim C(\beta^{\frac{1}{2}})$$

entonces de (A.3.1) y (A.3.2),

$$Z_A \sim \Gamma^{\frac{1}{2}}(1,\tfrac{1}{\beta_1}) \quad \text{ó} \quad Z_A \sim \Gamma^{\frac{1}{2}}(1,\beta_2) \tag{A.3.10}$$

3.5. CASO UN LOOK, AREAS HETEROGENEAS

3.5.1. Formato Intensidad.

$$Y_I \sim \Gamma(1,1) = \mathrm{Exp}(1) \quad \text{y} \quad X_I \sim \Gamma(\alpha,\lambda)$$

entonces, de (A.3.5),

$$Z_I \sim \tag{A.3.11}$$

3.5.2. Formato Amplitud.

$$Y_A \sim \text{Rayleigh}(1) \quad \text{y} \quad X_A \sim \Gamma^{\frac{1}{2}}(\alpha,\lambda) = N^{-\frac{1}{2}}(\alpha, 0, \lambda)$$

entonces de (A.3.6),

$$Z_A \sim K_A(\alpha,\gamma,1) \tag{A.3.12}$$

3.6. CASO UN LOOK, AREAS EXTREMADAMENTE HETEROGENEAS

3.6.1. Formato Intensidad.

$$Y_I \sim \Gamma(1,1) = \mathrm{Exp}(1) \quad \text{y} \quad X_I \sim \Gamma^{-1}(\alpha,\gamma)$$

entonces de (A.3.7),

$$Z_A \sim K_A(\alpha,\gamma,1) \tag{A.3.13}$$

3.6.2. Formato Amplitud.

$$Y_A \sim R(1) \quad \text{y} \quad X_A \sim \Gamma^{-\frac{1}{2}}(\alpha,\gamma) = N^{-\frac{1}{2}}(\alpha, \gamma, 0)$$

entonces de (A.3.8),

$$Z_A \sim G_A^0(\alpha,\gamma,1) \tag{A.3.14}$$

B. - VARIABLES ALEATORIAS ASOCIADAS A IMAGENES SAR

1. V.A. GAMA $X \sim \Gamma(a,b)$

Función de densidad:

$$f(x) = \frac{b^a}{\Gamma(a)} x^{a-1} e^{-bx} \;\; para\, x > 0 \qquad \text{(B.1.1)}$$

$a > 0$ parámetro de forma

$b > 0$ parámetro de escala

Casos particulares:

1) Si $a = \frac{1}{2}k,\ k\, entero\, positivo,\ \ y \quad b = \frac{1}{2},$ entonces $X \sim \chi^2(k)$

$o\, sea,\ \Gamma(\frac{1}{2}k, \frac{1}{2}) = \chi^2(k)$

Su función de densidad es

$$f(x) = \frac{1}{2^{k/2}\Gamma(\frac{1}{2}k)} x^{k/2-1} e^{-x/2} \;\; para\, x > 0 \qquad \text{(B.1.2)}$$

2) Si $a = 1$ entonces $X \sim Exp(b),\ o\, sea,\ \ \Gamma(1,b) = Exp(b)$

Su función de densidad es

$$f(x) = b\, e^{-bx} \qquad para\, x > 0 \qquad \text{(B.1.3)}$$

2. V.A. GAMA INVERSA $X \sim \Gamma^{-1}(a,b)$

Función de densidad:

$$f(x) = \frac{b^a}{\Gamma(a)} \frac{1}{x^{a+1}} e^{-b/x} \;\; para\, x > 0 \qquad \text{(B.2.1)}$$

$a > 0$ parámertro de forma

$b > 0$ parámetro de escala

Cálculo de la función de densidad de $\Gamma^{-1}(a,b)$:

Supóngase que $X \sim \Gamma(a,b)$

Se aplicará la transformación $y = g(x) = x^{-1}$, función positiva y monótona decreciente. Si f_X es la densidad de$X$, entonces la densidad de Y está dada por

$$f_Y(y) = \frac{1}{|g'(g^{-1}(y))|} f_X(g^{-1}(y)) \qquad \text{(B.2.2)}$$

en que la densidad de la $\Gamma(a,b)$ está dada por (B.1).

Reemplazando en (B.2.2),

$$f_Y(y) \;=\; \frac{1}{\left| -x(y)^{-2} \right|}\,\frac{b^a}{\Gamma(a)}\,x(y)^{a-1}\,e^{-b\mathrm{x}(y)}$$

$$f_Y(y) \;=\; \frac{b^a}{\Gamma(a)}y^{-a-1}\,e^{-b/y} \qquad para\,y > 0$$

la densidad dada en (B.2.1).

<u>3. V.A. RAIZ DE GAMA</u> $\quad X \sim \Gamma^{\frac{1}{2}}(a,b)$

Es una variable aleatoria X tal que $X^2 \sim \Gamma(a,b)$

<u>Función de densidad</u>:

$$f(x) = \frac{2b^a}{\Gamma(a)}x^{2a-1}e^{-bx^2} \qquad para\,x > 0 \tag{B.3.1}$$

$a\; > 0\,,\;\; b > 0$. El parámetro b es un parámetro de escala.

<u>Caso particular</u>:

Si $X \sim \Gamma^{\frac{1}{2}}(\frac{1}{2},\frac{1}{2})$ entonces $X^2 \sim \Gamma(\frac{1}{2},\frac{1}{2}) = \chi^2(1)$, luego $X \sim N(0,1)$.

Es decir, $\Gamma^{\frac{1}{2}}(\frac{1}{2},\frac{1}{2}) = N(0,1)$ (B.3.2)

<u>Cálculo de la función de densidad de</u> $\Gamma^{\frac{1}{2}}(a,b)$:

Supóngase que $X \sim \Gamma(a,b)$

Se aplicará la transformación $y = g(x) \;=\; x^{\frac{1}{2}}$, función positiva y creciente.

Si f_X es la densidad de X, entonces la densidad de Y está dada por (B.2.2)

en que la densidad de la $\Gamma(a,b)$ está dada por (B.1.1).

Reemplazando,

$$f_Y(y) \;=\; \frac{1}{\left| \frac{1}{2}x(y)^{-\frac{1}{2}} \right|}\,\frac{b^a}{\Gamma(\mathrm{a})}\,x(y)^{a-1}\,e^{-b\mathrm{x}(y)}$$

$$f_Y(y) \;=\; \frac{2b^a}{\Gamma(a)}y^{2a-1}\,e^{-by^2} \qquad para\,y > 0$$

la densidad dada en (B.3.1).

<u>4. V.A. RAIZ DE GAMA INVERSA</u> $\quad X \sim \Gamma^{-\frac{1}{2}}(a,b)$

Es una variable aleatoria X tal que $\frac{1}{X^2} \sim \Gamma(\mathrm{a},b)$

<u>Función de densidad</u>:

$$f(x) \;=\; \frac{2b^a}{\Gamma(a)}\,\frac{1}{x^{2a+1}}\,e^{-b/x^2} \qquad para\,x > 0 \tag{B.4.1}$$

$a\; > 0\,,\;\; b > 0.$

<u>Cálculo de la función de densidad de</u> $\Gamma^{-\frac{1}{2}}(a,b)$:

Supóngase que $X \sim \Gamma(a,b)$

Se aplicará la transformación $y = g(x) \;=\; x^{-\frac{1}{2}}$, función positiva y creciente.

La densidad de $\Gamma(a,b)$ está dada por (B.1.1). Reemplazando en (B.2.2),

$$f_Y(y) \;=\; \frac{1}{\left|-\frac{1}{2}x(y)^{-\frac{3}{2}}\right|}\,\frac{b^a}{\Gamma(a)}\,x(y)^{a-1}\,e^{-bx(y)^2}$$

$$f_Y(y) \;=\; \frac{2b^a}{\Gamma(a)}\,\frac{1}{y^{2a+1}}\,e^{-b/y^2} \qquad para\, y > 0$$

la densidad dada en (B.4.1).

5. V.A. RAYLEIGH $\quad X \sim R(b)$

Es una variable aleatoria X tal que $X^2 \sim Exp(b) \;=\; \Gamma(1,b)$

Entonces se puede escribir R(b) = $\Gamma^{\frac{1}{2}}(1,b)$ (B.5.1)

Función de densidad:

$$f(x) = 2bxe^{-bx^2} \qquad para\, x > 0 \tag{B.5.2}$$

$a\ > 0\,,\ b > 0.$Se obtiene de (B.4.1), reemplazando a=1.

6. V.A. RAIZ DE GAUSEANA INVERSA GENERALIZADA $\quad X \sim N^{-\frac{1}{2}}(a,b,c)$

Función de densidad:

$$f(x) = \frac{\left(\frac{c}{b}\right)^{a/2}}{K_a(2\sqrt{bc})}x^{2a-1}exp\left(-\,\frac{b}{x^2}\;-cx^2\right) \qquad para\, x > 0 \tag{B.6.1}$$

$$\begin{aligned} con \quad & b > 0\,,\ c \geq 0\ \ si\ a\ <\ 0 \\ & b > 0\,,\ c > 0\ \ si\ a\ =\ 0 \\ & b \geq 0\,,\ c > 0\ \ si\ a > 0 \end{aligned}$$

en que $K_a(v)$ es la función de Bessel de tercer tipo modificada. Tiene las siguientes propiedades:

$$K_{-a}(v) \;=\; K_a(v) \qquad \forall v > 0 \tag{B.6.2}$$

$Si\; v \to 0^+\ y\ \ a > 0\,,\, entonces$

$K_a(v) \;\to \Gamma(a)\,2^{a-1}\,v^{-a}$

(B.6.3)

Propiedad 1. Si $b\ \to 0^+\, y\ \ a > 0$ entonces $N^{-\frac{1}{2}}(a,b,c) \;\to\; \Gamma^{\frac{1}{2}}(a,c)$

(B.6.4)

Demostración:

Si $b \to 0^+$, por la propiedad (B.6.3),

$$Ka(2\sqrt{bc}) \rightarrow \Gamma(a)\, 2^{a-1}\, 2^{-a}\ c^{-a/2}\ b^{-a/2} = 2^{-1}\ \Gamma(a)\ \ c^{-a/2}\ b^{-a/2}$$

Entonces reemplazando en (10) y tomando límite,

$$\lim_{b\rightarrow 0^+} f(x) = \lim_{b\rightarrow 0^+} \frac{c^{a/2}\ b^{-a/2}}{2^{-1}\ \Gamma(a)\ \ c^{-a/2}\ b^{-a/2}}\ x^{2a-1}\, exp(-\frac{b}{x^2} - cx^2)$$

$$= \frac{2c^a}{\Gamma(a)} x^{2a-1} e^{-cx^2} \qquad para\, x > 0$$

la densidad de una $\Gamma^{\frac{1}{2}}(a,c)$ dada por (B.3.1).

Propiedad 2. Si $c \rightarrow 0^+ \, y \ a < 0$ entonces $N^{-\frac{1}{2}}(a,b,c) \rightarrow \Gamma^{-\frac{1}{2}}(-a,b)$
(B.6.5)

Demostración:
Utilizando las propiedades (B.6.2) y (B.6.3), se tiene que si $c \rightarrow 0^+$,

$$K_a(2\sqrt{bc}) = K_{-a}(2\sqrt{bc}) \rightarrow \Gamma(-a)\, 2^{-a-1}\ 2^{a}\ c^{a/2}\ b^{a/2} = 2^{-1}\ \Gamma(-a)\ \ c^{a/2} b^{a/2}$$

Entonces reemplazando en (B.6.3) y tomando límite,

$$\lim_{\lambda\rightarrow 0^+} f(x) = \lim_{c\rightarrow 0^+} \frac{\lambda^{a/2}\ b^{-a/2}}{2^{-1}\ \Gamma(-a)\ \ c^{a/2}\ b^{a/2}}\ x^{2a-1}\, exp(-\frac{b}{x^2} - cx^2)$$

$$= \frac{2b^{-a}}{\Gamma(-a)}\ \frac{1}{x^{-2a-1}}\ e^{-b/x^2} \qquad para\, x > 0$$

que es la densidad de una $\Gamma^{-\frac{1}{2}}(-a,b)$ dada por (B.4.1).

7. V.A. GAUSEANA GENERALIZADA $\qquad X \sim N(a,b,c)$

Función de densidad:

$$f(x) = \frac{(\frac{c}{b})^{a/2}}{2K_a(2\sqrt{bc})}\, \frac{1}{x^{a+1}}\ exp(-\text{bx} - \frac{c}{x}) \qquad para\, x > 0 \qquad \text{(B.7.1)}$$

$$\begin{aligned} con \quad & b > 0\,,\ c \geq 0\ \ si\ a\ <\ 0 \\ & b > 0\,,\ c > 0\ \ si\ a\ =\ 0 \\ & b \geq 0\,,\ c > 0\ \ si\ a > 0 \end{aligned}$$

Cálculo de la función de densidad de $N(a,b,c)$:
Supóngase que $X \sim N^{-\frac{1}{2}}(a,b,c)$

Se aplicará la transformación $y = g(x) = \frac{1}{x}$, función positiva y decreciente para $x > 0$. La densidad de $N^{-\frac{1}{2}}(a,b,c)$ está dada por (B.6.1). Reemplazando en la fórmula de cambio de variables aleatorias (B.2.2),

$$f_Y(y) = \frac{1}{\left|\text{-}\, y^2\right|} \frac{\left(\frac{c}{b}\right)^{a/2}}{2K_a(2\sqrt{bc})} y^{-a+1} exp(-by - \tfrac{c}{y})$$

$$f_Y(y) = \frac{\left(\frac{c}{b}\right)^{a/2}}{2K_a(2\sqrt{bc})} \frac{1}{y^{a+1}} exp(-by - \tfrac{c}{y}) \qquad para\, y > 0$$

la densidad dada en (B.7.1).

<u>8. V.A. GAUSEANA INVERSA GENERALIZADA</u> $\qquad X \sim N^{-1}(a,b,c)$

<u>Función de densidad</u>:

$$f(x) = \frac{\left(\frac{c}{b}\right)^{a/2}}{2K_a(2\sqrt{bc})} x^{a-1} exp(-\tfrac{b}{x} - cx) \qquad para\, x > 0 \qquad \text{(B.8.1)}$$

$con \quad b > 0\,,\; c \geq 0 \;\; si\;\; a < 0$

$\qquad\;\; b > 0\,,\; c > 0 \;\; si\;\; a = 0$

$\qquad\;\; b \geq 0\,,\; c > 0 \;\; si\;\; a > 0$

<u>Cálculo de la función de densidad de</u> $N^{-1}(a,b,c)$:

Supóngase que $X \sim N^{-\frac{1}{2}}(a,b,c)$

Se aplicará la transformación $y = g(x) = x^2$, función positiva y creciente para $x > 0$. La densidad de $N^{-\frac{1}{2}}(a,b,c)$ está dada por (B.6.1). Reemplazando en la fórmula de cambio de variables aleatorias (B.2.2),

$$f_Y(y) = \frac{1}{\left|2\, y^{\frac{1}{2}}\right|} \frac{\left(\frac{c}{b}\right)^{a/2}}{K_a(2\sqrt{bc})} y^{\frac{2a-1}{2}} exp(-\tfrac{b}{y} - cy)$$

$$f_Y(y) = \frac{1}{2} \frac{\left(\frac{c}{b}\right)^{a/2}}{K_a(2\sqrt{bc})} y^{a-1} exp(-\tfrac{b}{y} - cy) \qquad para\, y > 0$$

la densidad dada en (B.8.1).

<u>9. V.A. RAIZ DE GAUSEANA GENERALIZADA</u> $\qquad X \sim N^{\frac{1}{2}}(a,b,c)$

<u>Función de densidad</u>:

$$f(x) = \frac{\left(\frac{c}{b}\right)^{a/2}}{K_a(2\sqrt{bc})} \frac{1}{x^{2a+1}} exp(-\mathrm{b}x^2 - \tfrac{c}{x^2}) \qquad para\, x > 0 \qquad \text{(B.9.1)}$$

$con \quad b > 0\,,\ c \geq 0\ \ si\ a\ <\ 0$

$\qquad\ \ b > 0\,,\ c > 0\ \ si\ a\ =\ 0$

$\qquad\ \ b \geq 0\,,\ c > 0\ \ si\ a > 0$

Cálculo de la función de densidad de $N^{\frac{1}{2}}(a,b,c)$:

Supóngase que $X\ \sim N^{-\frac{1}{2}}(a,b,c)$

Se aplicará la transformación $y = g(x)\ =\ \frac{1}{x}$, función positiva y decreciente para $x > 0$.

La densidad de $N^{-\frac{1}{2}}(a,b,c)$ está dada por (B.6.1). Reemplazando en la fórmula de cambio de variables aleatorias (B.2.2),

$$f_Y(y)\ =\ \frac{1}{\left|\text{-}\,y^2\right|}\ \frac{\left(\frac{c}{b}\right)^{a/2}}{K_a(2\sqrt{bc})}\ y^{-2a+1}\ exp(\,-by^2 - \tfrac{c}{y^2})$$

$$f_Y(y)\ =\ \frac{\left(\frac{c}{b}\right)^{a/2}}{K_a(2\sqrt{bc})}\ \frac{1}{y^{2a+1}}\ exp(\,-by^2 - \tfrac{c}{y^2}) \qquad\qquad para\, y > 0$$

la densidad dada en (B.9.1).

<u>10. V.A. K AMPLITUD</u> $\qquad\qquad X \sim K_A(a,b,d)$

Función de densidad:

$$f(x) = \frac{4\ (bd)^{\frac{a+d}{2}}}{\Gamma(a)\Gamma(d)}\ x^{a+d-1}\ K_{a-d}(2x\sqrt{bd}) \qquad \text{(B.10.1)}$$

$$para\ \ x > 0$$

$con\ -a,\ b,\ \ c\ \ > 0$

<u>Propiedad:</u> Si $X \sim \Gamma^{\frac{1}{2}}(a,b)$ y si $Y \sim \Gamma^{\frac{1}{2}}(d,d)$, independientes,

entonces $Z = XY \sim K_A(a,b,\mathrm{d})$ (B.10.2)

Demostración:

Las densidades de X e Y están ambas dadas por (B.3.1) y por (B.1.1) respectivamente, esta última con los parámetros a y b iguales a d. La densidad conjunta es

$$f_{XY}(x,y) = \frac{2b^a}{\Gamma(a)}x^{2a-1}e^{-bx^2}\,\frac{2d^d}{\Gamma(d)}y^{2d-1}e^{-dy^2} \quad para\, x > 0,\ y > 0$$

$$f_{XY}(x,y) = \frac{4d^d b^a}{\Gamma(a)\Gamma(d)}x^{2a-1}y^{2d-1}\ e^{-bx^2-dy^2} \qquad \text{(B.8.3)}$$

Se define la función $de\ R^2$ en R^2 dada por

$$(u,v) = G(x,y) = (x,xy)$$

en que su inversa es

$$(x,y) = G^{-1}(u,v) = (u, \tfrac{v}{u})$$

Sean las variables aleatorias U y V definidas por G. Aplicando la transformación a (B.10.3), se tiene que la densidad conjunta de U y V está dada por

$$f_{UV}(u,v) = \frac{1}{|G'(G^{-1}(u,v))|} f_{XY}(G^{-1}(u,v))$$

$$f_{UV}(u,v) = \frac{1}{\begin{vmatrix} 1 & 0 \\ y & x \end{vmatrix}} \frac{4b^a d^d}{\Gamma(a)\Gamma(d)} u^{2a-1} \left(\frac{v}{u}\right)^{2d-1} e^{-bu^2 - d\left(\frac{v}{u}\right)^2}$$

$$f_{UV}(u,v) = \frac{1}{u} \frac{4b^a d^d}{\Gamma(a)\Gamma(d)} u^{2a-1} \left(\frac{v}{u}\right)^{2d-1} e^{-bu^2 - d\left(\frac{v}{u}\right)^2}$$

$$f_{UV}(u,v) = k \frac{\left(\frac{b}{dv^2}\right)^{\frac{a-d}{2}}}{K_{a-d}(2\sqrt{bdv^2})} u^{2(a-d)-1} e^{-bu^2 - dv^2/u^2} \qquad \text{(B.10.4)}$$

$$con \qquad k = \frac{4d^d b^a}{\Gamma(a)\Gamma(d)} \frac{K_{a-d}(2\sqrt{bdv^2})}{\left(\frac{b}{dv^2}\right)^{\frac{a-d}{2}}} v^{2d-1} = \frac{4\,(bd)^{\frac{a+d}{2}}}{\Gamma(a)\Gamma(d)} v^{a+d-1} K_{a-d}(2\sqrt{bdv^2})$$

El lado derecho de la expresión (B.10.4) es proporcional a la densidad de una variable aleatoria Raiz de Gauseana Inversa Generalizada, (B.6.1), en la variable u, con parámetros $a-d,\ dv^2$ y b . Integrando $f_{UV}(u,v)$ con respecto de u se obtiene la densidad marginal de $V = ZY$:

$$f_V(v) = \frac{4(bd)^{\frac{a+d}{2}}}{\Gamma(a)\Gamma(d)} K_{a-d}(2v\sqrt{bd})\ v^{a+d-1} \qquad \text{para } v > 0$$

Comparando con la dada en (B.10.1), esta densidad corresponde a la de una $\mathrm{K}_A(a,b,c)$.

<u>11. V.A. K INTENSIDAD</u> $X \sim K_I(a,b,d)$

<u>Función de densidad</u>:

$$f(x) = \frac{2(bd)^{\frac{\alpha+d}{2}}}{\Gamma(a)\Gamma(d)} x^{\frac{\alpha+d}{2}-1} K_{a-d}(2\sqrt{bdx})$$

$$para\ x > 0 \qquad \text{(B.11.1)}$$

$con\ -a,\ b,\ d\ > 0$

Propiedad: Si $X \sim \Gamma(a,b)$ y si $Y \sim \Gamma(d,d)$, independientes,
entonces $Z = XY \sim K_I(a,b,\mathrm{d})$ (B.11.2)

Demostración:
Las densidades de X e Y están ambas dadas por (B.1.1), esta última con los parámetros a y b iguales a d. La densidad conjunta es

$$f_{XY}(x,y) = \frac{b^a}{\Gamma(a)} x^{a-1} e^{-bx} \frac{d^d}{\Gamma(d)} y^{d-1} e^{-dy} \qquad para\, x > 0,\ y > 0$$

$$f_{XY}(x,y) = \frac{b^a d^d}{\Gamma(a)\Gamma(d)} x^{a-1} y^{d-1}\, e^{-bx-dy} \tag{B.11.3}$$

Se define la función $de\ R^2$ enR^2 dada por

$$(u,v) = G(x,y) = (x{,}xy)$$

Su inversa es

$$(x,y) = G^{-1}(u,v) = (u, \tfrac{v}{u})$$

y el jacobiano de la transformación es

$$\left|G'(G^{-1}(u,v))\right| = u$$

Sean las variables aleatorias U y V definidas por G. Aplicando la transformación a (B.11.3), se tiene que la densidad conjunta de U y V está dada por

$$f_{UV}(u,v) = \frac{1}{\left|G'(G^{-1}(u,v))\right|} f_{XY}(G^{-1}(u,v))$$

$$f_{UV}(u,v) = \frac{1}{u} \frac{b^a d^d}{\Gamma(a)\Gamma(d)}\, u^{a-1} \left(\frac{v}{u}\right)^{d-1} e^{-bu-d\left(\frac{v}{u}\right)}$$

$$f_{UV}(u,v) = k\, \frac{\left(\frac{b}{dv}\right)^{\frac{a-d}{2}}}{2K_{a-d}(2\sqrt{bdv})}\ u^{(a-d)-1} e^{-bu-dv/u} \tag{B.11.4}$$

$con \quad k = \frac{b^a d^d}{\Gamma(a)\Gamma(d)}\ \frac{2K_{a-d}(2\sqrt{bdv})}{\left(\frac{b}{dv}\right)^{\frac{a-d}{2}}} v^{d-1} = \frac{2\,(bd)^{\frac{a+d}{2}}}{\Gamma(a)\Gamma(d)}\, K_{a-d}(2\sqrt{bdv})\, v^{\frac{a+d}{2}-1}$

El lado derecho de la expresión (B.11.4) es proporcional a la densidad de una variable aleatoria Gauseana Inversa Generalizada, (B.8.1), en la variable u, con parámetros $a-d,\ dv$ y b . Integrando $f_{UV}(u,v)$ con respecto de u se obtiene la densidad marginal de $V = ZY$:

$$f_V(v) = \frac{2(bd)^{\frac{a+d}{2}}}{\Gamma(a)\Gamma(d)}\ K_{a-d}(2\sqrt{bdv})\ \ v^{\frac{a+d}{2}-1} \qquad \text{para } v > 0$$

Comparando con la dada en (B.11.1), esta densidad corresponde a la de una $\mathrm{K}_I(a, b, d)$.

12. V.A. G CERO AMPLITUD $\qquad X \sim \mathrm{G}^0_\mathrm{A}(a,b,d)$

Función de densidad:

$$f(x) = \frac{2d^d\Gamma(d-a)}{b^a\Gamma(d)\Gamma(-a)}\ \frac{x^{2d-1}}{(b+dx^2)^{d-a}} \quad para\, x > 0 \qquad \text{(B.12.1)}$$

$con\ -a,\ b,\ c\ \ > 0$

Propiedad:

Si $X \sim \Gamma^{-\frac{1}{2}}(a, b)$ y si $Y \sim \Gamma^{\frac{1}{2}}(d, d)$, independientes,

entonces $Z = XY \sim G^0_A(-a, b, d)$ (B.12.2)

Demostración:

Las densidades de X e Y están ambas dadas por (B.4.1) y (B.3.1), respectivamente esta última con los parámetros a y b iguales a d. La densidad conjunta es

$$f_{XY}(x, y) = \frac{2b^a}{\Gamma(a)}\frac{1}{x^{2a+1}}e^{-b/x^2}\ \frac{2d^d}{\Gamma(d)}\ y^{2d-1}e^{-dy^2} \quad para\, x > 0,\ y > 0$$

$$f_{XY}(x, y) = \frac{4b^a d^d}{\Gamma(a)\Gamma(d)}\ \frac{1}{x^{2a+1}}y^{2d-1}\ e^{-b/x^2 - dy^2} \qquad \text{(B.12.3)}$$

Se define la función $de\ R^2$ en R^2 dada por

$$(u, v)\ = G(x, y)\ = (x{,}xy)$$

Su inversa es

$$(x, y)\ = G^{-1}(u, v) = (u,\ \tfrac{v}{u})$$

y el jacobiano de la transformación es

$$\left|G'(G^{-1}(u, v))\right| = u$$

Sean las variables aleatorias U y V definidas por G. Aplicando la transformación a (B.12.3), se tiene que la densidad conjunta de U y V está dada por

$$f_{UV}(u, v) = \frac{1}{\left|G'(G^{-1}(u,v))\right|}f_{XY}(G^{-1}(u, v))$$

$$f_{UV}(u,v) = \frac{1}{u} \frac{4b^a d^d}{\Gamma(a)\Gamma(d)} \frac{1}{u^{2a+1}} \left(\frac{v}{u}\right)^{2d-1} e^{-b/u^2 - d\left(\frac{v}{u}\right)^2}$$

$$f_{UV}(u,v) = k \frac{2(b+dv^2)^{a+d}}{\Gamma(a+d)} \frac{1}{u^{2(a+d)+1}} e^{-\frac{b+dv2}{u^2}} \quad \text{(B.12.4)}$$

con $$k = \frac{2b^a d^d \Gamma(a+d)}{\Gamma(a)\Gamma(d)} \frac{v^{2d-1}}{(b+dv^2)^{a+d}}$$

El lado derecho de la expresión (B.12.4) es proporcional a la densidad de una variable aleatoria Raiz de Gama Inversa, (B.4.1), en la variable u, con parámetros $a+$d y $b+dv^2$. Integrando $f_{UV}(u,v)$ con respecto de u se obtiene la densidad marginal de $V = ZY$:

$$f_V(v) = \frac{2b^a d^d \Gamma(a+d)}{\Gamma(a)\Gamma(d)} \frac{v^{2d-1}}{(b+dv^2)^{a+d}} \qquad \text{para } v > 0$$

Comparando con la dada en (B.12.1), esta densidad corresponde a la de una $G_A^0(-a,b,d)$.

<u>13. V.A. G CERO INTENSIDAD</u> $X \sim \mathrm{G}_{\mathrm{I}}^0(a,b,d)$

<u>Función de densidad</u>:

$$f(x) = \frac{d^d \Gamma(d-a)}{b^a \Gamma(d)\Gamma(-a)} \frac{x^{d-1}}{(b+dx)^{d-a}} \qquad para\ x > 0 \quad \text{(B.13.1)}$$

$con\ -a,\ b,\ d\ > 0$

<u>Propiedad:</u>

Si $X \sim \Gamma^{-1}(a,b)$ y si $Y \sim \Gamma(d,d)$, independientes,
entonces $Z = XY \sim G_I^0(a,b,d)$ (B.13.2)

Demostración:

Las densidades de X e Y están dadas por (B.2.1) y por (B.1.1) respectivamente, esta última con los parámetros a y b iguales a d. La densidad conjunta es

$$f_{XY}(x,y) = \frac{b^a}{\Gamma(a)} x^{-a-1} e^{-b/x} \frac{d^d}{\Gamma(d)} y^{d-1} e^{-dy} \qquad para\, x > 0,\ y > 0$$

$$f_{XY}(x,y) = \frac{d^d b^a}{\Gamma(a)\Gamma(d)} \frac{y^{d-1}}{x^{a+1}} e^{-dy-b/x} \quad \text{(B.13.3)}$$

Se define la función $de\ R^2$ en R^2 dada por

$$(u,v) = G(x,y) = (x, xy)$$

Su inversa es

$$(x,y) = G^{-1}(u,v) = (u, \tfrac{v}{u})$$

y el jacobiano de la transformación es

$$\left|G'(G^{-1}(u,v))\right| = u$$

Sean las variables aleatorias U y V definidas por G. Aplicando la transformación a (B.12.3), se tiene que la densidad conjunta de U y V está dada por

$$f_{UV}(u,v) = \frac{1}{\left|G'(G^{-1}(u,v))\right|} f_{XY}(G^{-1}(u,v))$$

$$f_{UV}(u,v) = \frac{1}{u}\frac{b^a d^d}{\Gamma(a)\Gamma(d)}\frac{\left(\frac{v}{u}\right)^{d-1}}{u^{a+1}} e^{-dv/u-b/u}$$

$$f_{UV}(u,v) = \frac{b^a d^d}{\Gamma(a)\Gamma(d)}\frac{v^{d-1}}{u^{n+a+1}} e^{-(nv-b)/u}$$

$$f_{UV}(u,v) = k\,\frac{(dv+a)^{n+a}}{\Gamma(a+d)}\frac{1}{u^{d+a+1}} e^{-(dv-b)/u} \qquad \text{(B.13.4)}$$

con $\qquad k = \frac{b^a d^d}{\Gamma(a)\Gamma(d)}\frac{\Gamma(d+a)}{(dv+a)^{d+a}} v^{d-1}$

El lado derecho de la expresión (B.13.4) es proporcional a la densidad de una variable aleatoria Gama Inversa, (B.2.1),en la variable u, con parámetros $d+a$ y $dv+b$. Integrando $f_{UV}(u,v)$ con respecto de u se obtiene la densidad marginal de $V = ZY$:

$$f_V(v) = \frac{b^a d^d}{\Gamma(a)\Gamma(d)}\frac{\Gamma(d+a)}{(dv+a)^{d+a}} v^{d-1} \qquad \text{para } v > 0$$

Comparando con la dada en (B.11.1), esta densidad corresponde a la de una $G_A^0(\text{-}a, b, d)$.

<u>14. V.A. G AMPLITUD</u> $\qquad X \sim G_A(a,b,c,d)$

Es una generalización de la variable aleatoria G_A^0. Esta última resulta ser la densidad límite de la G_A cuando el parámetro λ tiende a cero.

<u>Función de densidad</u>:

$$f(x) = \frac{2d^d\left(\frac{c}{b}\right)^{a/2}}{\Gamma(d)Ka(2\sqrt{bc})} x^{2d-1}\left(\frac{b+dx^2}{c}\right)^{\frac{a-d}{2}} K_{a-d}(2\sqrt{c(b+dx^2)}) \qquad \text{(B.14.1)}$$

$para\, x > 0$

con las relaciones entre $a, b\;\; y\; c$ como en la Raíz de Gauseana Inversa Generalizada

Propiedad 1:

Si $b \to 0^+ \; y \; a, c > 0$, entonces $G_A(a, b, c, d) \to K(a, c, d)$ (B.14.2)

Demostración:

Si $b \to 0^+$, por la propiedad (B.6.3),

$$K_a(2\sqrt{bc}) \to 2^{-1}\,\Gamma(\alpha)\;\, c^{-a/2}\, b^{-a/2}$$

y $$K_{a\text{-}d}(2\sqrt{c(b+dx^2)}) \to K_{a-d}(2\sqrt{\lambda d}\,x)$$

Entonces reemplazando en (17) y tomando límite,

$$\lim_{\gamma \to 0^+} f(x) = \lim_{\gamma \to 0^+} \frac{\lambda^{a/2} b^{-a/2}}{2^{-1}\Gamma(a)\lambda^{c-a/2} b^{-a/2}}\, x^{2d-1} \left(\frac{dx^2}{c}\right)^{\frac{a-d}{2}} K_{a-d}(2\sqrt{cd}\,x)$$

$$= \frac{2\lambda^{\frac{a+d}{2}}}{\Gamma(a)}\, d^{\frac{a-d}{2}}\, Ka_{\alpha-d}(2\sqrt{cd}\,x)\; x^{d+a-1} \qquad para\, x > 0$$

Esta función de densidad corresponde a una variable aleatoria $K(\alpha,c,n)$. Entonces se puede escribir

Propiedad 2:

Si $c \to 0^+$, $a < 0$ y $b > 0$, entonces $G_A(a, b, c, d) \to G_A^0(a, b, d)$ (B.14.3)

Demostración:

Por la propiedad (11), se tiene

$$K_a(2\sqrt{bc}) = K - a(2\sqrt{bc}),\; -a>0$$

Si $c \to 0^+$, por la propiedad (12),

$$K_{-a}(2\sqrt{bc}) \to 2^{-1}\,\Gamma(-a)\;\, c^{a/2}\, b^{a/2}$$

y $$K_{a\text{-}d}(2\sqrt{c(b+dx^2)}) \to 2^{-1}\,\Gamma(d\text{-}a)\;\, c^{\frac{\alpha\text{-}n}{2}}\,(b+dx^2)^{\frac{a-d}{2}}$$

Entonces reemplazando en (B.13.1) y tomando límite,

$$\lim_{c \to 0^+} f(x) = \lim_{c \to 0^+} \frac{2d^d\, c^{a/2} b^{-a/2}}{2^{-1}\Gamma(d)\Gamma(-a) c^{a/2} b^{a/2}}\, x^{2d-1} \left(\frac{b+dx^2}{c}\right)^{\frac{a-d}{2}}$$

$$\times\, 2^{-1}\,\Gamma(d\text{-}a)\;\, c^{\frac{a\text{-}d}{2}}\,(b+dx^2)^{\frac{a-d}{2}}$$

$$= \frac{2n^n\,\Gamma(d\text{-}a)}{b^a\Gamma(d)\Gamma(-a)}\;\; \frac{x^{2d-1}}{(b+dx^2)^{d-a}} \qquad para\, x > 0$$

Esta función de densidad corresponde a una variable aleatoria $G_A^0(a, b, d)$.

15. V.A. G INTENSIDAD $X \sim \mathrm{G_I}(a,b,c,d)$

Es una generalización de la variable aleatoria G_I^0. Esta última resulta ser la densidad límite de la G_I cuando el parámetro λ tiende a cero.

Función de densidad:

$$f(x) = \frac{d^d (c/b)^{a/2}}{\Gamma(d) Ka(2\sqrt{bc})}\, x^{d-1} (\tfrac{b+dx}{c})^{\frac{a-d}{2}} K_{a-d}(2\sqrt{c(b+dx)})$$

$$para\, x > 0 \qquad \text{(B.15.1)}$$

con las relaciones entre $a, b\ \ y\ c$ como en la Raíz de Gauseana Inversa Generalizada

16. FUNCIONES DE BESSEL

Función de Bessel de Segundo Tipo Modificada (o de Tercer Tipo):

$$K_a(v) = \frac{\pi}{2\, sen(a\pi)} \left[I_{-a}(v) - I_a(v) \right] \qquad \text{(B.16.1)}$$

con v y a números reales, $a \neq 0,\ \pm 1,\ \pm 2, ...$

$$K_n(v) = \lim_{a \to n} K_a(v) \quad \text{para } \ n = 0,\ \pm 1,\ \pm 2, ... \qquad \text{(B.16.2)}$$

$I_a(v)$ es la función de Bessel de Primer Tipo Modificada, índice a,

$$I_a(v) = i^{-a} J_a(iv) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{v^{2k+a}}{2^{2k+a} \Gamma(k+1)\ \Gamma(k+a+1)} \qquad \text{(B.16.3)}$$

y $\mathrm{J}_a(v)$ es la función de Bessel de Primer Tipo, índice a,

$$J_a(v) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k\, v^{2k+a}}{2^{2k+a}\ k!\ \Gamma(k+a+1)} \qquad \text{(B.16.4)}$$

Si n es entero, entonces $-I_a(v) = I_a(v)$

La función de Bessel de 2o. tipo modificada $K_a(v)$ es solución de la ecuación diferencial no lineal de segundo orden

$$x^2y'' + xy' - (x^2 + a^2)\,y = 0$$

C. - RESUMEN

<u>1. V.A. GAMA</u> $X \sim \Gamma(a,b)$

<u>Función de densidad</u>:

$$f(x) = \frac{b^a}{\Gamma(a)} x^{a-1} e^{-bx} \;\; para\, x > 0$$

$a\, > 0$ parámetro de forma

$b > 0$ parámetro de escala

<u>Casos particulares</u>:

1) Si $a = \frac{1}{2}k,\; k\, entero\, positivo,\;\; y \quad b = \frac{1}{2},$ entonces $X \sim \chi^2(k)$

$o\, sea,\; \Gamma(\frac{1}{2}k, \frac{1}{2}) \; = \chi^2(k)$

Su función de densidad es

$$f(x) = \frac{1}{2^{k/2}\Gamma(\frac{1}{2}k)} x^{k/2-1} e^{-x/2} \;\; para\, x > 0$$

2) Si $a = 1$ entonces $X \; \sim Exp(b),\; o\, sea,\;\; \Gamma(1,b) = Exp(b)$

Su función de densidad es

$$f(x) = b\; e^{-bx} \qquad para\, x > 0$$

<u>2. V.A. GAMA INVERSA</u> $X \sim \Gamma^{-1}(a,b)$

<u>Función de densidad</u>:

$$f(x) = \frac{b^a}{\Gamma(a)} \frac{1}{x^{a+1}} e^{-b/x} \;\; para\, x > 0$$

$a\, > 0$ parámertro de forma

$b > 0$ parámetro de escala

<u>3. V.A. RAIZ DE GAMA</u> $X \sim \Gamma^{\frac{1}{2}}(a,b)$

Es una variable aleatoria X tal que $X^2 \sim \Gamma(a,b)$

<u>Función de densidad</u>:

$$f(x) = \frac{2b^a}{\Gamma(a)} x^{2a-1} e^{-bx^2} \qquad para\, x > 0$$

$a\, > 0\,,\;\; b > 0\,$. El parámetro b es un parámetro de escala.

<u>Caso particular</u>:

Si $X \sim \Gamma^{\frac{1}{2}}(\frac{1}{2}, \frac{1}{2})$ entonces $X^2 \sim \Gamma(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}) = \chi^2(1)$, luego $X \sim N(0,1)$.

Es decir, $\Gamma^{\frac{1}{2}}(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}) = N(0,1)$

<u>4. V.A. RAIZ DE GAMA INVERSA</u> $X \sim \Gamma^{-\frac{1}{2}}(a, b)$

Es una variable aleatoria X tal que $\frac{1}{X^2} \sim \Gamma(\mathrm{a}, b)$

Función de densidad:

$$f(x) \ = \frac{2b^a}{\Gamma(a)} \ \frac{1}{x^{2a+1}} \ e^{-b/x^2} \qquad para\, x > 0$$

$a \ > 0\,,\ \ b > 0.$

5. V.A. RAYLEIGH $\ X \sim R(b)$

Es una variable aleatoria X tal que $X^2 \sim Exp(b) \ = \ \Gamma(1,b)$

Entonces se puede escribir R(b) = $\Gamma^{\frac{1}{2}}(1,b)$

Función de densidad:

$$f(x) = 2bxe^{-bx^2} \qquad para\, x > 0$$

$a \ > 0\,,\ b > 0.$

6. V.A. RAIZ DE GAUSEANA INVERSA GENERALIZADA $\quad X \sim N^{-\frac{1}{2}}$(a, b, c)

Función de densidad:

$$f(x) = \frac{\left(\frac{c}{b}\right)^{a/2}}{K_a(2\sqrt{bc})} x^{2a-1} exp(- \frac{b}{x^2} \ - cx^2) \qquad para\, x > 0$$

$con \quad b > 0\,,\ c \geq 0\ \ si\ \ a\ <\ 0$
$\qquad\quad b > 0\,,\ c > 0\ \ si\ \ a\ =\ 0$
$\qquad\quad b \geq 0\,,\ c > 0\ \ si\ \ a > 0$

Propiedad 1. Si $b \ \to 0^+\, y \ \ a > 0$ entonces $N^{-\frac{1}{2}}(a,b,c) \ \to \ \Gamma^{\frac{1}{2}}(a,c)$

Propiedad 2. Si $c \to 0^+\, y \ \ a < 0$ entonces $N^{-\frac{1}{2}}(a,b,c) \ \to \ \Gamma^{-\frac{1}{2}}(-a,b)$

7. V.A. GAUSEANA INVERSA GENERALIZADA $\quad X \sim N^{-1}$(a, b, c)

Función de densidad:

$$f(x) = \frac{\left(\frac{c}{b}\right)^{a/2}}{2K_a(2\sqrt{bc})} x^{a-1} exp(- \frac{b}{x} \ - cx) \qquad para\, x > 0$$

$con \quad b > 0\,,\ c \geq 0\ \ si\ \ a\ <\ 0$
$\qquad\quad b > 0\,,\ c > 0\ \ si\ \ a\ =\ 0$
$\qquad\quad b \geq 0\,,\ c > 0\ \ si\ \ a > 0$

8. V.A. K AMPLITUD $\qquad X \sim K_A(a,b,d)$

Función de densidad:

$$f(x) = \frac{4\,(bd)^{\frac{a+d}{2}}}{\Gamma(a)\Gamma(d)}\, x^{a+d-1}\, K_{a-d}(2x\sqrt{bd})$$

$para\ \ x > 0$

$con\ -a,\ b,\ \ c\ \ > 0$

Propiedad: Si $X \sim \Gamma^{\frac{1}{2}}(a, b)$ y si $Y \sim \Gamma^{\frac{1}{2}}(d, d)$, independientes, entonces $Z = XY \sim K_A(a, b,\mathrm{d})$

9. V.A. K INTENSIDAD $X \sim K_I(a{,}b{,}d)$

Función de densidad:

$$f(x) = \frac{2(bd)^{\frac{\alpha+d}{2}}}{\Gamma(a)\Gamma(d)} x^{\frac{\alpha+d}{2}-1} K_{a-d}(2\sqrt{bdx})$$

$para\ \ x > 0$

$con\ -a,\ b,\ \ d\ \ > 0$

Propiedad: Si $X \sim \Gamma(a, b)$ y si $Y \sim \Gamma(d, d)$, independientes, entonces $Z = XY \sim K_I(a, b,\mathrm{d})$

10. V.A. G CERO AMPLITUD $X \sim \mathrm{G}^0_{\mathrm{A}}(a{,}b{,}d)$

Función de densidad:

$$f(x) = \frac{2d^d\Gamma(d-a)}{b^a\Gamma(d)\Gamma(-a)}\ \frac{x^{2d-1}}{(b+dx^2)^{d-a}} \quad para\, x > 0$$

$con\ -a,\ b,\ \ c\ \ > 0$

Propiedad:

Si $X \sim \Gamma^{-\frac{1}{2}}(a, b)$ y si $Y \sim \Gamma^{\frac{1}{2}}(d, d)$, independientes, entonces $Z = XY \sim G^0_A(-a, b, d)$

11. V.A. G CERO INTENSIDAD $X \sim \mathrm{G}^0_{\mathrm{I}}(a, b, d)$

Función de densidad:

$$f(x) = \frac{d^d\Gamma(d-a)}{b^a\Gamma(d)\Gamma(-a)}\ \frac{x^{d-1}}{(b+dx)^{d-a}} \qquad para\ \ x > 0$$

$con\ -a,\ b,\ \ d\ \ > 0$

Propiedad:
Si $X \sim \Gamma^{-1}(a,b)$ y si $Y \sim \Gamma(d,d)$, independientes,
entonces $Z = XY \sim G_I^0(a,b,d)$

12. V.A. G AMPLITUD $X \sim \mathrm{G_A}(a,b,c,d)$
Es una generalización de la variable aleatoria $\mathrm{G_A^0}$. Esta última resulta ser la densidad límite de la $\mathrm{G_A}$ cuando el parámetro λ tiende a cero.
Función de densidad:

$$f(x) = \frac{2d^d\left(\frac{c}{b}\right)^{a/2}}{\Gamma(d)Ka(2\sqrt{bc})} x^{2d-1}\left(\frac{b+dx^2}{c}\right)^{\frac{a-d}{2}} K_{a-d}(2\sqrt{c(b+dx^2)})$$

$para\, x > 0$
con las relaciones entre a, b y c como en la Raíz de Gauseana Inversa Generalizada

Propiedad 1:
Si $b \to 0^+ y$ $a, c > 0$, entonces $\mathrm{G_A}(a,b,c,d) \to \mathrm{K}(a,c,d)$

Propiedad 2:
Si $c \to 0^+$, $a < 0$ y $b > 0$, entonces $\mathrm{G_A}(a,b,c,d) \to G_A^0(a,b,d)$

13. V.A. G INTENSIDAD $X \sim \mathrm{G_I}(a,b,c,d)$
Es una generalización de la variable aleatoria $\mathrm{G_I^0}$. Esta última resulta ser la densidad límite de la G_I cuando el parámetro λ tiende a cero.
Función de densidad:

$$f(x) = \frac{d^d(c/b)^{a/2}}{\Gamma(d)Ka(2\sqrt{bc})}\, x^{d-1}\left(\frac{b+dx}{c}\right)^{\frac{a-d}{2}} K_{a-d}(2\sqrt{c(b+dx)})$$

$para\, x > 0$

con las relaciones entre a, b y c como en la Raíz de Gauseana Inversa Generalizada