D I S E Ñ O D E

E X P E R I M E N T O S FACTORIALES

APLICADOS A

PROCESOS I N D U S T R I A L E S

Jorge Galbiati Riesco

D I S E Ñ O D E E X P E R I M E N T O S FACTORIALES
APLICADOS A PROCESOS I N D U S T R I A L E S

Jorge Galbiati Riesco

I N D I C E

Pag.

CAPITULO 1.
DISEÑOS EXPERIMENTALES FACTORIALES 1-1

1.1 Definiciones 1-1
Resistencia de un Mortero 1-2
1.2 Diseños "Uno-a-la-Vez" 1-4
Ejemplo 1.1 1-4
EJERCICIOS 1-6

CAPITULO 2.
DISEÑOS EXPERIMENTALES CON DOS FACTORES A DOS NIVELES 2-1

Fabricación de Mermelada de Uva a partir de los Descartes de la Selección
de Uva de Mesa; Estudio de la Acidez y la Consistencia 2-1
Precisión del Test de Disolución utilizado en la Industria Farmacéutica. 2-3
Ejemplo 2 2-4
2.1 Gráficos de Interacción 2-6
2.2 Matriz de Diseño del Experimento 2^2 2-7
2.3 Tablas de Respuestas 2-8
2.4 Diagramas de Efectos 2-9
2.5 Aleatorización 2-9
2.6 Réplicas 2-10
Secado de Sanitarios 2-10
EJERCICIOS 2-13

CAPITULO 3
DISEÑOS FACTORIALES CON TRES FACTORES A DOS NIVELES 3-1

Efecto de Catalizadores en la Emisión de SO_4 a la Atmósfera,
en una Planta de Producción de Acido Sulfúrico 3-1
Ley de Cal Libre en el Proceso de Producción de Cal 3-3
Análisis de Laboratorio para la Determinación de
contenido de Cloruro en Cátodos de Cobre 3-3
3.1 Matriz de Diseño del Experimento 2^3 3-4
Materiales Aislantes de Ruido, para encerramiento de una Máquina de Forja 3-8
3.2 Tabla de Respuestas y Diagrama de Efectos del Experimento 2^3 3-9
Ejemplo 3 3-9
3.3 Gráficos de Interacción 3-10
Optimización de la Plasticidad de un ompuesto de Caucho de la
Banda de Rodamiento de Neumáticos 3-12
EJERCICIOS 3-14

CAPITULO 4
DISEÑOS FACTORIALES FRACCIONADOS 4-1
Ejemplo 4 4-1
Ejemplo 5 4-1
Ejemplo 6 4-2
Precisión del Resultado del Análisis Químico para Medir el contenido de Oro en Concentrados de Cobre 4-2
4.1 Efectos Confundidos 4-4
Ejemplo 7 4-8
4.2 Construcción de Bloques en Diseños 2^k 4-9
Ejemplo 8 4-10
4.3 Resolución de un Diseño Factorial Fraccionado 4-12
EJERCICIOS 4-12

CAPITULO 5
DISEÑOS FACTORIALES CON MAS DE DOS NIVELES POR FACTOR 5-1

Pérdida de Calibración de Láminas Bimetálicas, utilizadas com Elemento de Seguridad en Artefactos de Gas 5-1
5.1 Diseños Factoriales 2^3, con dos Factores a tres niveles 5-2
Ejemplo 9 5-3
Resistencia a la Flexión en la Fabricación de Ladrillos 5-6
5.2 Diseños 3^2 Fraccionados 5-9
Ejemplo 10 5-10
EJERCICIOS 5-15

CAPITULO 6
ELEMENTOS DE ANALISIS DE VARIANZA 6-1

6.1 El Modelo Lineal 6-1
6.2 Análisis de Varianza a un Factor 6-4
Ejemplo 11 6-7
6.3 Tabla de Análisis de Varianza a un Factor
Distribución de Operadoras para la Recepción de Pedidos 6-9
6.4 Análisis de Varianza a dos Factores 6-10
6.5 Tabla de Análisis de Varianza a dos Factores 6-12
Ejemplo 12 6-12
Proceso de Extracción de Cobre de la Lixiviación de Bateas 6-14
EJERCICIOS 6-16

APENDICE Tabla F

CAPITULO 1

DISEÑOS EXPERIMENTALES FACTORIALES

Todo fenómeno que podemos observar, y que presenta características susceptibles de ser medidas, exhibe un comportamiento variable. Sea este fenómeno un proceso llevado a cabo en un laboratorio de precisión, en que se puede tener un alto grado de control sobre los factores que causan variación, sea un proceso de fabricación con avanzada tecnología, o sea un fenómeno en que interviene en forma importante el ser humano, como los de tipo social, psicológico o económico. En el primer caso la variación es muy pequeña, casi imperceptible, pero aún así existe. En el caso de los fenómenos de tipo humano, donde las fuentes de variación son numerosas, cuesta distinguirlas, y sus causas son difíciles de aislar y más aún de medir, la variación es muy grande.

La *variabilidad* y la *calidad* son conceptos que se contraponen; puede definirse la calidad como la reducción de la variabilidad. Consecuentemente, el logro del mejoramiento de la calidad de lo que entrega un proceso, depende en gran medida del grado con que se pueden identificar y cuantificar las fuentes de variación de cada una de las etapas del proceso. Sólo reduciendo la variabilidad y logrando diseñar procesos estables se puede mejorar la calidad de los productos y servicios.

La estadística es la tecnología desarrollada específicamente para el estudio, análisis y comprensión de la variabilidad de los procesos. De ahí que prácticamente todos los métodos estadísticos sean útiles para el desarrollo de sistemas de mejoramiento de la calidad.

Pero tal vez el tipo de situación en que, potencialmente, hay más aplicación de la tecnología estadística, es la determinación de factores que causan variación, en el resultado de un proceso de producción o de servicio; la cuantificación del efecto que cada uno de ellos tiene sobre esa variación, y el estudio de la forma en que se combinan y afectan conjuntamente la variación. Todo esto conforma un experimento, y la manera de llevarlo a cabo es hacer variar los factores que potencialmente influyen sobre un fenómeno, y observar su efecto, de modo de poder determinar si efectivamente son causa de variación. Y si lo son, cuantificar el grado de influencia de cada uno, comparando los efectos que se producen, como respuesta a diferentes cantidades o calidades de los factores.

1.1.- Definiciones. En relación a un estudio del tipo descrito anteriormente, se pueden definir los siguientes conceptos:

Experimento. Un estudio en el que el investigador tiene un alto grado de control sobre las fuentes de variación importantes, se denomina experimento. Si se tiene poco control sobre los factores, se habla de un estudio observacional.

Factores. Los fenómenos que potencialmente causan variación, y que son controlados por el experimentador, se denominan factores. También se denominan *tratamientos*.

Niveles de un factor. Son los valores que toma un factor. En general toman valores que se miden en escala categórica, aunque a veces suelen ser medidos en escalas numéricas.

Combinación de Tratamientos. Cada una de las combinaciones de niveles de todos los factores involucrados en el experimento.

Corrida Experimental. Cada una de las fases en que se lleva a cabo el experimento. Cada corrida experimental corresponde a una realización del experimento, bajo una determinada combinación de tratamientos, y produce una observación.

Réplicas. Todas las corridas experimentales que corresponden a una misma combinación de tratamientos. Son repeticiones del experimento, bajo idénticas condiciones de los factores. Tienen un doble objetivo: Lograr mayor precisión en la estimación de los efectos de los factores y de sus interacciones, y estimar el error experimental.

Experimento Balanceado. Es un experimento en que todos los niveles de cada factor aparece el mismo número de veces. Si no se da esta situación, el experimento es desbalanceado.

Diseño. La estructura constituida por los factores y los niveles que se les asignan, en la experimentación. El diseño es la parte que controla el experimentador.

Respuesta. La variable objetivo, que se pretende optimizar, y que depende potencialmente de los factores. La respuesta es lo que se mide como resultado de la experimentación, no es controlada por el experimentador. Es una variable medida en escala numérica.

Efecto Principal. Un efecto principal es la variación en la respuesta, atribuida al cambio en un factor determinado, a través de sus distintos niveles.

Interacción. El efecto producido por la acción de un factor, influido por la presencia de otro. Es un efecto combinado de dos o más factores. Si no existe un efecto de interacción, se dice que los efectos de los factores son aditivos.

Error Experimental. La parte de la variabilidad que no está explicada por los factores involucrados en el experimento.

ESTUDIO DE CASO : RESISTENCIA DE UN MORTERO.

Mortero es el material que resulta de la mezcla de agua, arena, cemento, eventualmente aditivo, en proporciones adecuadas, y que al fraguar y endurecer, adquiere resistencia. Desde la fabricación de los primeros cementos en el mundo, se han realizado infinidades de ensayos para determinar cuáles son las mejores dosificaciones y los mejores elementos para la fabricación de un mortero, para que satisfaga las necesidades de una determinada aplicación. Se sabe que son muchas las variables que afectan el proceso de endurecimiento, o fraguado, del mortero.

Entre las variables que afectan la resistencia a la flexión y compresión de un mortero, sin duda que las más importantes son la característica del cemento que se está utilizando y la cantidad del mismo.

Dentro de los diferentes tipos de cementos que se pueden utilizar, existen los Puzolánicos y los Siderúrgicos, y dentro de los mismos, unos de alta resistencia y otros de resistencias normales.

El Cemento Puzolánico es aquel en cuya fabricación se utiliza Puzolana, una ceniza volcánica decantada durante milenios. El Cemento Siderúrgico utiliza escoria producida en un Alto Horno, durante el proceso de fabricación de acero.

Entre los factores que influyen sobre la resistencia del mortero, están el tipo de arena y el tipo de agua que se utilizan. De acuerdo a la zona geográfica, varían la granulometría de la arena, las sales minerales y materias orgánicas que contiene. Estos últimos elementos también varían según la procedencia del agua.

Se hizo un estudio para observar el efecto de algunos de los factores controlables que afectan la resistencia de un mortero, a la flexión y la compresión. Para efectos de este estudio, se consideraron solo tres variables: Cantidad de Cemento Siderúrgico (resistencia normal), tipo de arena, cantidad de agua.

<u>OBJETIVO DEL EXPERIMENTO</u> : El objetivo del experimento es determinar en qué medida afectan las tres variables mencionadas, la resistencia de un mortero, y cómo interaccionan entre ellas.

DISEÑO DEL EXPERIMENTO : Es un experimento a tres factores, con dos niveles cada uno, según la siguiente descripción:

FACTORES		NIVELES
A :	Cantidad de Cemento Siderúrgico de resistencia normal.	a_1 : 300 kg. de cemento por m^3 de mortero a_2 : 450 kg. de cemento por m^3 de mortero
B :	Granulometría de arena utilizada.	b_1 : Diámetro máximo 2.5 mm b_2 : Diámetro máximo 1.25 mm
C :	Razón de agua - cemento.	c_1.: 0.8 c_2 : 1.2

RESPUESTA: La respuesta es la resistencia a la flexión y compresión, en Kg/cm^2 de probetas de mortero del tipo Rilem (de 4x4x16 cm). Los ensayos se realizaron en equipos normalizados para medir resistencias a la flexión y compresión.

Se asume que las características de la Arena y del Agua utilizada, en cuanto a su composición química, son similares.

PREPARACIÓN DE MUESTRAS: Determinadas la materias primas con las que se confeccionaron la probetas para los ensayos, se realizó una homogeneización de cada una de ellas. Se determinó cuáles son sus componentes, composición química, presencia de sales, presencia de material orgánico,

Una de las variables que también es muy influyente en el fraguado de morteros es la condición ambiente en que se realiza el fraguado; luego, durante el experimento fue necesario mantener las probetas que estaban en proceso de fraguado, en una condición climática estable y controlada. Se hicieron fraguar al aire por 24 horas, con una humedad relativa constante sobre el 90%. Posterior a esto, se continuó su proceso de fraguado sumergidas en agua, a una temperatura entre 20 y 21 ºC, por los días necesarios para realizar el ensayo.

Las probetas se fabricaron bajo un mismo procedimiento, Se confeccionaron 5 probetas para cada combinación de tratamientos, con el objeto de realizar pruebas de resistencia a la flexión y compresión, transcurridos 1,2, 3, 7, y 28 días.

En la medida que las probetas cumplían con la edad para su ensayo, se extrajeron directamente de la piscina de agua para someterlas a la prueba. Primero se les realizó el ensayo de flexión y luego el de compresión. Estos ensayos son de tipo destructivos por lo que una vez realizado el ensayo de flexión, a los dos trozos que quedaban se les realizó la prueba de compresión. El valor representativo es el promedio de los dos valores.

LIMITACIONES: Como mencionamos anteriormente, existen muchos factores que influyen sobre las resistencias finales de los morteros. Una gran limitante que puede tener el experimento es la presencia de algún elemento contaminante que no sea detectable con los equipos de laboratorio con que se cuenta. Esto podría traer como consecuencia una distorsiones en los resultados observados.

□

1.2.- Diseños "uno-a-la-vez". Consisten en mantener constante los valores de todos los factores que potencialmente inciden en el efecto que se quiere observar, menos uno de ellos, que es el que está siendo analizado. Esto se debe repetir para cada uno de los factores que se han identificado. Este es un tipo de experimentación bastante utilizado, pero que adolece de muchas limitaciones. Son adecuados cuando se presentan condiciones como las siguientes:

1) El resultado es una función compleja del factor, por lo que se deben emplear múltiples valores o niveles distintos del factor para determinar el comportamiento de la respuesta.

2) Los efectos resultantes no presentan interacciones. Esto significa que la forma del comportamiento de uno de ellos no es afectado por el nivel en que se encuentran los demás. En este caso se dice que los efectos son aditivos.

Estas situaciones se dan muy rara vez. Por lo general se presentan, en cambio, condiciones como las siguientes:

1) En la región experimental, es decir, el rango en que varían los valores de los factores, el efecto resultante presenta muy poca curvatura, y ésta no cambia de sentido, como sería, por ejemplo, el cambio de una región cóncava a una región convexa.

2) Los efectos resultantes no son aditivos. El nivel en que está un factor influye sobre la forma en que otro factor afecta la respuesta.

Bajo estas condiciones, el método de experimentación "uno-a-la-vez" da resultados poco satisfactorios, muchas veces con conclusiones erróneas. En general, es conveniente estudiar simultáneamente el efecto de dos o más factores, en un mismo experimento. Las ventajas de este procedimiento, sobre el hacer un experimento individual para cada factor, son, que se pueden estudiar las interacciones entre los factores, se ahorra tiempo y esfuerzo, y las conclusiones a que se lleguen tienen mayor aplicabilidad, debido a que cada factor se estudia bajo condiciones variables de los otros.

<u>EJEMPLO 1.1</u>. Supóngase que se desea investigar qué efecto tiene sobre la dureza de un pegamento epóxico, la precisión a que están sometidos los elementos que se han de adherir, y la temperatura, durante el tiempo de endurecimiento. Se mantiene la temperatura constante, a 50 ºC, por decisión del experimentador, durante el experimento.

A la presión se le dan los valores 5, 10, 15, 20, 25, 30, y 35 Psi., y se mide la dureza resultante en cada uno de los 7 casos. Los resultados se ilustran en la siguiente figura:

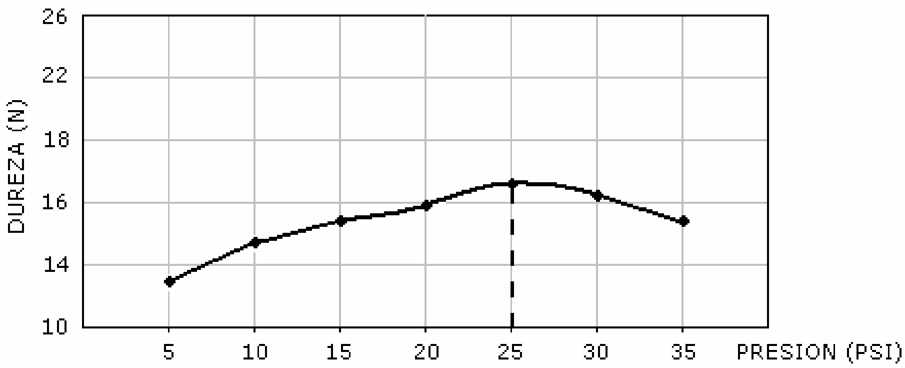


Figura 1.1. Dureza del pegamento epóxico, versus presión, a 50ºC.

Se observa que el mejor resultado se obtiene si se fija la presión en 25 Psi. Después se realiza un experimento separado para determinar la temperatura óptima. Se fija la presión en 25 Psi. y a la temperatura se le da los valores 10, 20, 30, 40,5é0, y 60 grados. El efecto sobre la dureza se ilustra en la siguiente figura, que muestra que el óptimo se obtiene con una temperatura de 30 ºC. El valor máximo de dureza es 23.

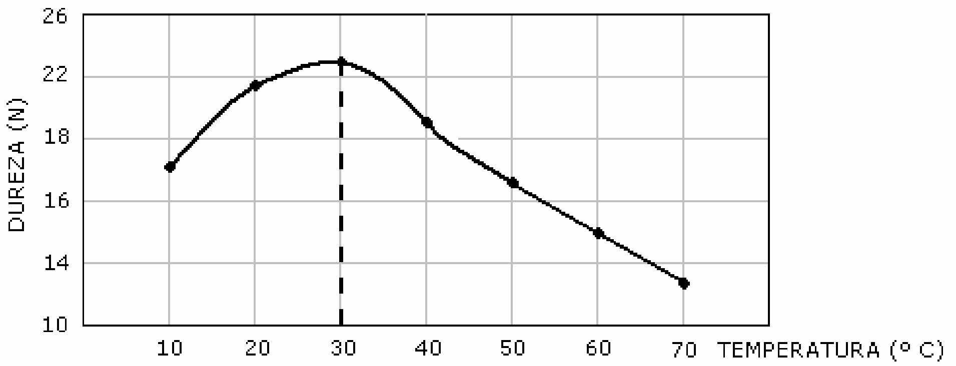


Figura 1.2. Dureza del pegamento epóxico, versus temperatura, a 25 Psi.

Sin embargo, si conociéramos la forma de la respuesta, como función de los dos factores combinados, presión y temperatura, como se muestra en la figura siguiente, veríamos que el punto encontrado, presión = 25 Psi., temperatura = 30 ºC, no es el óptimo. El óptimo está en el valor (17grados, 16 Psi), y el valor máximo de dureza, en ese punto, es 36.

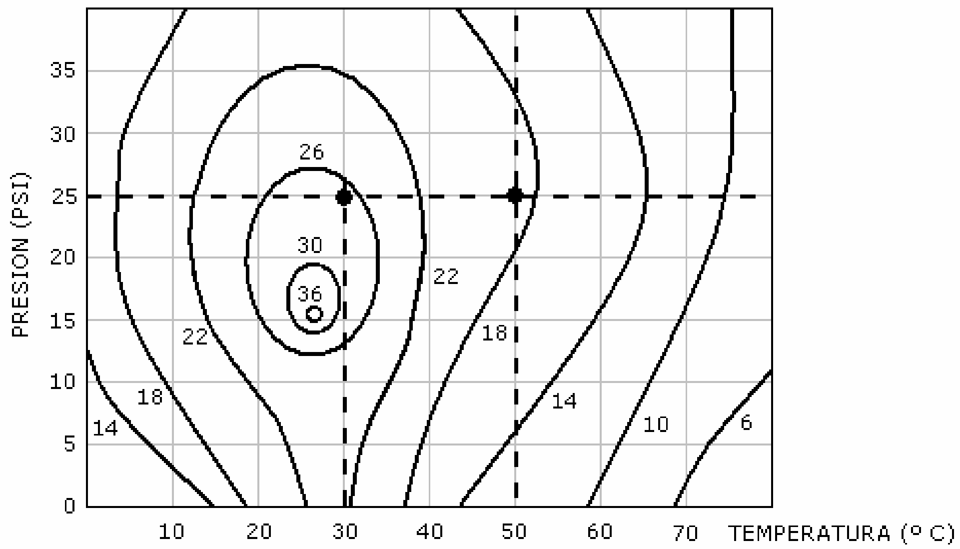


Figura 1.3. Curvas de nivel de la dureza del pegamento epóxico, versus presión y temperatura.

EJERCICIOS.

1.1) Dé una definición de cada uno de los siguientes conceptos, relacionados con diseños experimentales:

a) Niveles de un factor.
b) Combinación de tratamientos.

c) Corrida experimental.
d) Respuesta.

1.2) En la fabricación de retenes para ser utilizados en motobombas (entre la bomba y el motor a gasolina), es importante la calidad del pulido del interior de la pieza móvil. Se puede utilizar dos técnicas de pulido, que llamaremos *pulido 1* y *pulido 2*, respectivamente. El metal de la camisa interior puede ser de tres aleaciones distintas, *aleación 1*, *aleación 2*, y *aleación 3*. También interesa observar el efecto de variar el ancho de la pieza; se le dan cuatro valores, 9mm, 10mm, 11mm, y 12mm.

Se diseña un experimento para determinar qué combinación produce el mejor resultado. La respuesta es la presión a la cual comienza a filtrar el retén. Esta se mide utilizando el mecanismo, mientras se aumenta la presión del agua que debe retener.. A mayor presión, mejor. El experimento se diseña de tal modo que se observe el efecto de cada combinación de tratamientos dos veces.

a) Identifique los siguientes elementos, en este experimento:
   i) Todos los factores.
   ii) Los niveles de cada factor.
   iii) La respuesta, y la unidad en que se mide.
   iv) Las combinaciones de tratamientos.
   v) El número de corridas experimentales.
   vi) El número de réplicas, por cada combinación de tratamientos.
b) ¿Es balanceado el experimento ?
c) Describa los efectos principales.
d) ¿Cuáles son las posibles interacciones ?

CAPITULO 2

DISEÑOS FACTORIALES 2^2 , CON DOS FACTORES A DOS NIVELES

Una fase inicial de un estudio tiene por objeto efectuar un diagnostico, por esa razón, basta con utilizar sólo dos niveles para cada factor. La conveniencia de fijar solo dos niveles por factor, está en la economía del experimento y en la simplicidad del análisis de los resultados. El diagnostico no nos entregará la combinación de los niveles optima, de ambos factores, sino que nos permitirá determinar si cada uno de ellos afecta o no la respuesta, y en qué medida, así como nos dirá si existe o no interacción entre ambos factores. Los diseños con dos factores a dos niveles son dísenos experimentales extremadamente simples, pero a través de su análisis se pueden ilustrar los principios de la experimentación.

En estos diseños hay $2^2 = 4$ combinaciones de tratamientos posibles, pues por cada uno de los dos niveles de un factor hay dos niveles del otro. Por eso suele hablarse de diseños experimentales 2^2, o simplemente experimentos 2^2 . A los factores los designaremos Factor A y Factor B, respectivamente.

De los dos niveles que definimos para cada factor, a uno lo llamaremos nivel bajo y al otro nivel alto. En general, ésta es sólo cuestión de nombres, pues no siempre se puede cuantificar el factor. En ciertas situaciones se prefiere hablar de ausencia y presencia del factor. Por ejemplo, los niveles pueden ser dos distintos procesos de producción, o pueden ser la utilización o no utilización de un dispositivo.

Los niveles de los factores, en general, se miden en escala categórica nominal. Esta, eventualmente, puede ser ordinal o numérica. La respuesta siempre debe medirse en escala numérica.

ESTUDIO DE CASO : FABRICACIÓN DE MERMELADA DE UVA A PARTIR DE LOS DESCARTAS DE LA SELECCIÓN DE UVA DE MESA; ESTUDIO DE LA ACIDEZ Y LA CONSISTENCIA.

Una industria se propone fabricar mermelada de uva, aprovechando los descartas de uva de mesa, producidos por el proceso de selección.

En la fabricación de mermelada, la adición de ácido cítrico aumenta la acidez del producto, y la adición de pectina, aumenta la consistencia.

El descarte de uva es una materia prima no tradicional, por lo que se requiere estudiar la formulación óptima del producto.

El proceso de la elaboración de la mermelada sigue el siguiente esquema:

1. Recepción
2. Pesaje3. Calentamiento
4. Adición solución de pectina
5. Calentamiento
6. Enfriamiento
7. Adición solución de ácido cítrico
8. Envasado

En una etapa inicial del estudio de formulación, se requiere conocer la forma como influyen la acidez y la consistencia, en la aceptación del producto.

Para ello se diseño un experimento con dos factores, la concentración de ácido cítrico y de pectina, a dos niveles cada uno.

DISEÑO DEL EXPERIMENTO : Se hizo con dos factores, a dos niveles cada uno, con ocho réplicas.

FACTORES	NIVELES
A: Acido Cítrico	a_1: 0.43 % a_2: 1.29 %
B: Pectina	b_1 : 0.86 % b_2 : 1.71 %

Este es un experimento 2^2, a dos factores con dos niveles cada uno. Tiene cuatro combinaciones de tratamientos, que son:

a_1b_1 :	Acido cítrico 0.86 %; Pectina 0.43 %.
a_2b_1 :	Acido cítrico 1.71 %; Pectina 0.43 %.
a_1b_2 :	Acido cítrico 0.86 %; Pectina 1.29 %.
a_2b_2 :	Acido cítrico 1.71 %; Pectina 1.29 %.

Para medir sus efectos sobre la respuesta, se utilizó un panel de degustación, en que participó un grupo de ocho jueces, a los que se les dio a probar cada uno de los productos, en orden diferente, para su evaluación. El orden en que se efectuaron fue determinado al azar.

RESPUESTA: Puntaje promedio, resultado de la evaluación sensorial del producto por un grupo de panelistas, utilizando la escala hedónica (escala de puntuación de preferencia).

□

Introduciremos un tipo especial de notación utilizada en experimentos factoriales, y que ha sido una de las notaciones tradicionales que se ha empleado. Los niveles de A los designamos por a_1 y a_2 , los de B por b_1 y b_2 , respectivamente. El siguiente esquema muestra los elementos principales de este sencillo experimento:

1	2	3	4	5
	DISEÑO			
CORRIDA EXPERIMENTAL	FACTOR A	FACTOR B	COMBINACION DE TRATAMIENTOS	RESPUESTA
1	a_1	b_1	a_1b_1	Y_{11}
2	a_2	b_1	a_2b_1	Y_{21}
3	a_1	b_2	a_1b_2	Y_{12}
4	a_2	b_2	a_2b_2	Y_{22}

Tabla 2.1 - Combinaciones de Tratamientos del Diseño Experimental 2^2 .

Cada una de las cuatro filas es una corrida experimental. La segunda y tercera columnas constituyen lo que controla el experimentador, y es el diseño del experimento. La cuarta columna es una representación simbólica de cada combinación de niveles de ambos factores. Cada uno de sus elementos es una combinación de tratamientos. La ultima columna es lo que se mide, como resultado de cada corrida experimental, y está constituida por números, que son las respuestas.

A veces se utilizan los símbolos de la columna 4 para las respuestas, en lugar de los símbolos de la columna 5. Por lo que, a_1b_2 puede representar el nombre de la combinación de tratamientos constituida por A al nivel bajo y B al nivel alto, como también puede representar el numero Y_{12} , indistintamente. Según el contexto en que se encuentra, se sabrá que esta simbolizando.

El siguiente diagrama ilustra, en forma esquemática, los elementos que constituyen el experimento 2^2:

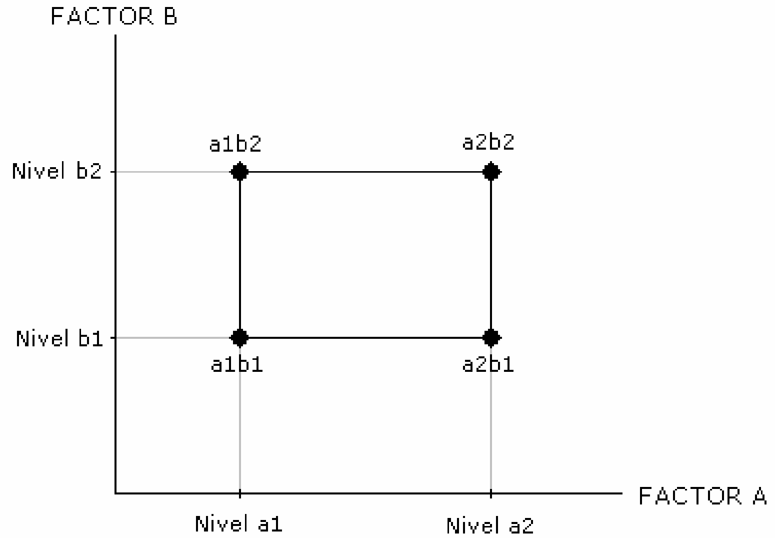


Figura 2.1 - Representación gráfica del experimento 2^2.

ESTUDIO DE CASO : PRECISION DEL TEST DE DISOLUCION UTILIZADO EN LA INDUSTRIA FARMACEUTICA.

La industria farmacéutica tiene que asegurar al paciente la entrega de medicamentos de elevada calidad. Uno de los requisitos de calidad de un medicamento es que sea efectivo. Para medir este parámetro se han diseñado diversas pruebas de laboratorio. En el caso de las formas farmacéuticas sólidas, específicamente comprimidos, se ha difundido ampliamente el uso del *test de disolución.* Se trata de un test diseñado para simular de la manera más fidedigna posible, laaquellas condiciones *in vivo* que afectan la velocidad de disolución y por lo tanto de biodisponibilidad del medicamento. El objetivo de este test, entonces, es dar una aproximación a la evaluación de la disponibilidad fisiológica de la droga y proveer un medio de control para asegurar que todos los lotes muestran similar efectividad clínica.

OBJETIVO DEL EXPERIMENTO : El objetivo del presente experimento es evaluar el efecto que tienen algunos componentes del test de disolución, sobre la velocidad de la disolución de comprimidos del medicamento Prednisona.

DISEÑO DEL EXPERIMENTO : Se diseñó a dos factores, el tipo de aparato y la velocidad de rotación, con dos niveles cada uno. Se hicieron seis réplicas, por cada combinación de tratamientos.

FACTORES	NIVELES
A : Tipo de aparato.	a_1 : Canastillo rotatorio. a_2 : Paleta.
B : Velocidad de Rotación.	b_1 : 50 revoluciones por min. b_2 : 100 revoluciones por min.

RESPUESTA: La respuesta es el porcentaje del contenido de Prednisona declarado (50 mg.) que se disuelve en un tiempo de 30 minutos. Al tiempo 30 minutos se extrae una cantidad de fluido de disolución desde cada uno de seis vasos, y se cuantifica la Pregnisona mediante técnicas espectro fotométricas.

LIMITACIONES : Las posibles limitaciones del experimento se deben a la presencia de factores no deseados. Estos factores, y la forma de reducir su influencia, se indican a continuación:

FACTOR	REDUCCION DE SU INFLUENCIA
Montage del equipo	Controlar verticalidad de los ejes.
Centrado de los vasos.	Controlar con accesorios específicos, que cada vaso esté centrado.
Regulación de la altura de la paleta o canastillo.	Controlar con regulador de altura y fijar con mecanismo de soporte.
Volumen del fluido.	Medir exactamente el volumen.
Evaporación.	Tapar el vaso durante la experiencia.

□

EJEMPLO 2.1. En la fabricación de placas de madera aglomerada, se utiliza viruta combinada con resina de urea-formaldeido. Una característica deseable del producto terminado, es su rigidez. Se piensa que hay dos factores que inciden en esta característica, y que pueden controlarse.

Uno es el tipo de resina, y el otro es el granulado de la viruta. Se diseña un experimento en que los dos factores tienen dos niveles. La respuesta es la fuerza necesaria para que una placa, de dimensiones determinadas, sufra una deformación de 5 milímetros. La siguiente tabla resume los factores y niveles del experimento:

FACTORES	NIVELES
A : TIPO DE RESINA	a_1 : Resina Standard a_2 : Resina Nueva
B : GRANULADO DE LA VIRUTA	b_1 : Fino b_2 : Grueso

RESPUESTA : Rigidez de la placa. (medida en Kg.). Peso necesario para producir una deformación de 5 milímetros.

Supóngase que realizo el experimento, y la medición de las respuestas dio los siguientes resultados:

COMBINACIÓN DE TRATAMIENTOS	RESPUESTA
a_1b_1	$Y_{11} = 16$
a_2b_1	$Y_{21} = 17$
a_1b_2	$Y_{12} = 10$
a_2b_2	$Y_{22} = 23$

Tabla 2.2 - Tabla de Respuestas del Experimento de las Placas de Madera

Podemos estimar un efecto promedio global, igual a

$$\begin{aligned} 1 &= \tfrac{1}{4}(a_1b_1 + a_2b_1 + a_1b_2 + a_2b_2) \\ &= \frac{16+17+10+23}{2} = 16.5 \end{aligned}$$

Utilizaremos el numero 1 para simbolizar este efecto. Mas adelante justificaremos el haber elegido este símbolo.

También podemos estimar un efecto debido al factor A, consistente en la diferencia entre el promedio del nivel a_2 de A menos el promedio al nivel a_1, diferencia que también podemos llamar *pendiente* del factor A. Usaremos el símbolo A para designar este efecto:

$$\begin{aligned} A &= \tfrac{1}{2}\left[(a_2b_1 + a_2b_2) - (a_1b_1 + a_1b_2)\right] \\ &= \frac{17+23-16-10}{2} = 7 \end{aligned}$$

Se observa que hay un efecto atribuible al factor A. El signo positivo indica que el valor de la respuesta aumenta cuando pasamos del nivel a_2 al nivel a_1 del factor. Nótese que nuevamente estamos usando un mismo símbolo para dos cosas diferentes: La letra A se utiliza para identificar el factor, así como para simbolizar el valor numérico de su efecto.

Análogamente, podemos calcular un efecto debido al factor B:

$$\begin{aligned} B &= \tfrac{1}{2}\left[(a_1b_2 + a_2b_2) - (a_1b_1 + a_2b_1)\right] \\ &= \frac{10+23-16-17}{2} = 0 \end{aligned}$$

El cero se interpreta como que no hay efecto de B.

La magnitud de la interacción se puede calcular como la mitad de la diferencia entre las pendientes correspondientes al factor A. Las pendientes son las diferencias entre las durezas debido a los dos niveles del factor B. El símbolo que usamos para la interacción entre A y B es AB. Entonces,

$$\begin{aligned} AB &= \tfrac{1}{2}\left[(a_2b_2 - a_1b_1) - (a_1b_2 - a_1b_1)\right] \\ &= \frac{23-17-10+16}{2} = 6 \end{aligned}$$

Este resultado muestra que hay un efecto de interacción.

2.1.- Gráficos de Interacción. Continuando con el Ejemplo 2, graficaremos estos resultados para apreciar mejor su comportamiento. El siguiente gráfico representa Rigidez versus Resina, estratificado por Granulado:

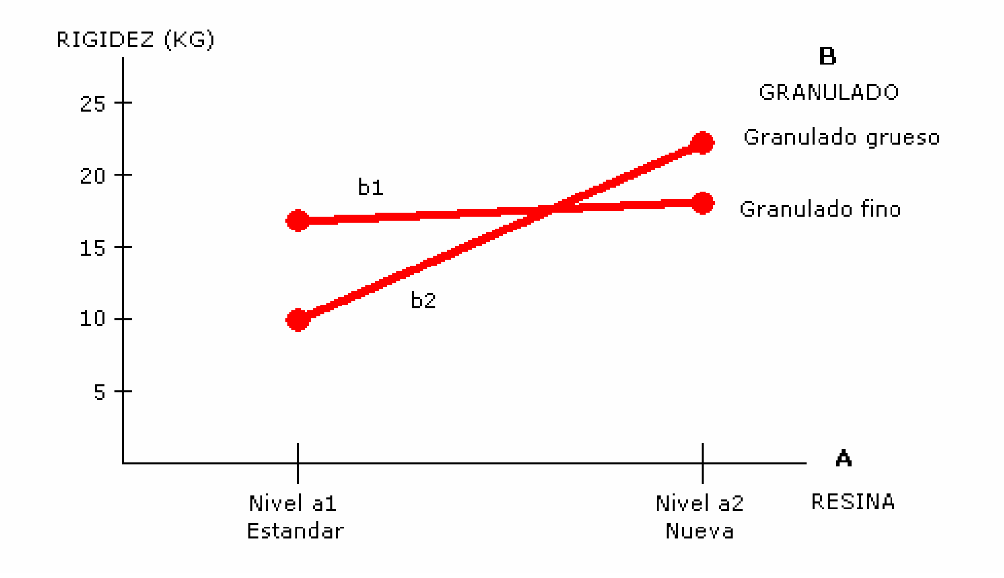


Figura 2.2 - Rigidez versus tipo de Resina, estratificado por Granulado

El gráfico que sigue representa Rigidez versus Granulado, estratificado por Resina:

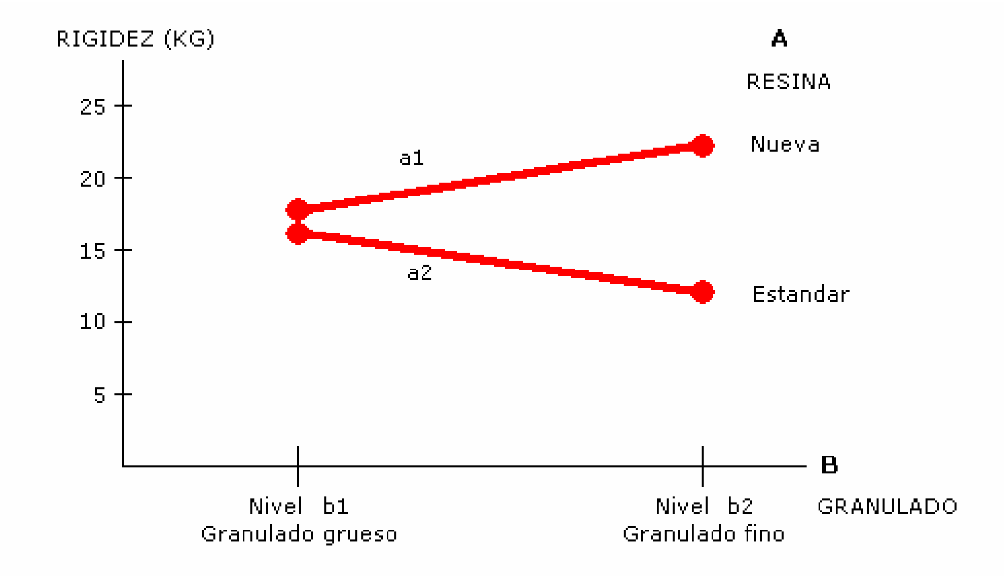


Figura 2.3 - Rigidez versus Granulado, estratificado por tipo de Resina

La diferencia en las pendientes de las dos curvas, en ambos gráficos, indica que hay interacción, puesto que muestra gráficamente que la variación de la dureza debido a un factor, es distinta según el nivel a que esta el otro factor.

2.2.- Matriz de Diseño del Experimento 2^2 . Los cálculos anteriores, para cuantificar los efectos, se pueden efectuar en forma resumida en una tabla, en la que, en el sentido horizontal, se representa cada uno de los efectos 1, A, B, y AB, y en el sentido vertical, cada uno de las combinaciones de tratamientos. En el interior de la tabla se pone un signo (+) cuando la correspondiente respuesta va sumada, y un signo (-) cuando va restada, en el calculo del efecto. La tabla se denomina Matriz de Diseño, y se muestra a continuación:

	EFECTO			
RESPUESTA	1	A	B	AB
a_1b_1	+	-	-	+
a_2b_1	+	+	-	-
a_1b_2	+	-	+	-
a_2b_2	+	+	+	+

Tabla 2.3 - Matriz de Diseño del Experimento 2^2

Nótese que aquí los símbolos a_1b_1 , etc., representan los valores numéricos de las respuestas asociadas a las respectivas combinaciones de tratamientos, que también se simbolizan Y , etc. Cada columna (vertical) representa un efecto, y es una colección ordenada de los símbolos (+) y (-), que indican el signo que se da a la particular respuesta. En adelante las denominaremos también efectos. Así (+,+,-,-) es un efecto. Hay que convenir en el orden de las combinaciones de tratamientos para saber que mide cada uno. Mantengamos el orden introducido en la representación anterior, llamado orden standard, es decir, a_1b_1 , a_2b_1, a_1b_2, a_2b_2 (el primer subíndice varía mas rápidamente que el segundo).

Un efecto es un *contraste* si tiene tantos (+) como (-). Los efectos correspondientes a A, B y AB son contrastes. El efecto 1 no lo es.

Dos efectos se pueden "multiplicar" de la siguiente forma: Se comparan dos componentes que están en la misma posición relativa en ambos efectos que se están multiplicando. Al resultado

se le asigna, en la misma posición relativa, un (+) si ambas componentes de los multiplicandos son iguales, y un (-) si son distintos. Esto se repite para cada componente. De esta manera, AxB es igual a

(-,+,-,+) x (-,-,+,+) = (+,-,-,+)

Obsérvese que el resultado de multiplicar A por B es precisamente la interacción AB. Esta es una bondad de la notación que estamos usando. Entonces podemos escribir AxB = AB, sin olvidar que esta expresión solo se refiere a la construcción de la matriz de diseño.

Si el resultado de multiplicar dos contrastes es un contraste, como en el ejemplo anterior, se dice que los contrastes que se multiplicaron son ortogonales. Los dos contrastes A, y B son ortogonales. Sin embargo, A no es ortogonal consigo mismo, pues el producto es igual a (+,+,+,+), que no es contraste, y que es el efecto promedio, simbolizado por 1. Lo mismo ocurre si multiplicamos cualquier efecto por si mismo, el resultado es 1. También se puede verificar que al multiplicar el efecto 1 por cualquier efecto, da el mismo como resultado, por ejemplo, 1xAB = AB. Por esa razón se ha escogido el 1 para designar a este efecto promedio.

Otra bondad notacional es la siguiente: Supongamos, por un momento, que hacemos los productos algebraicos entre una de las expresiones ($a_2 + a_1$) o ($a_2 - a_1$), por una de las expresiones ($b_2 + b_1$), o ($b_2 - b_1$). Obtenemos los siguientes resultados:

$$
\begin{aligned}
(a_2 + a_1)(b_2 + b_1) &= a_2 b_2 + a_2 b_1 + a_1 b_2 + a_1 b_1 \\
(a_2 - a_1)(b_2 + b_1) &= a_2 b_2 + a_2 b_1 - a_1 b_2 - a_1 b_1 \\
(a_2 + a_1)(b_2 - b_1) &= a_2 b_2 - a_2 b_1 + a_1 b_2 - a_1 b_1 \\
(a_2 - a_1)(b_2 - b_1) &= a_2 b_2 - a_2 b_1 - a_1 b_2 + a_1 b_1
\end{aligned}
$$

Las expresiones de la derecha son precisamente las fórmulas para calcular los efectos 1, A, B y AB, respectivamente, faltando sólo los divisores, determinadas por la matriz de diseño. Por lo tanto, las expresiones de la izquierda nos permiten construir la matriz de diseño: El signo menos determina el efecto que se esta midiendo; el signo más indica que se esta promediando sobre los niveles de ese factor; en la interacción se esta midiendo el efecto simultáneo de los dos factores. Estos cálculos son sumamente útil cuando se esta trabajando con un numero elevado de factores.

Nótese que las expresiones de la izquierda son sólo notación, pues no tiene sentido interpretar, por ejemplo, ($a_2 + a_1$), como una suma, ya que a_2 y a_1 son valores de una variable categórica.

2.3.- Tabla de Respuestas. Los cálculos numéricos que se hicieron, para determinar los efectos 1, A, B, y AB, se pueden efectuar en forma tabular, por cada efecto, anotando las respuestas en columnas separadas, según su signo. Se promedian ambas columnas y se hace la diferencia, de acuerdo al signo de los números de la columna respectiva. El resultado es una cuantificación del efecto correspondiente. La tabla se denomina Tabla de Respuestas, y se muestra más adelante, para los datos del Ejemplo 2.

La fila *Verificación* contiene las sumas de ambas columnas. Sirve como una comprobación parcial, pues debe ser igual a la suma de todas las respuestas. La fila *Neto* contiene el valor absoluto de la suma de los valores de la fila *Total* por los respectivos de la fila *Factor*. La fila divisor se obtiene contando todos los números que hay en la columna respectiva. La fila *Efecto* contiene el cuociente entre el Neto y el Divisor respectivo. Los *Rangos* indican el orden de cada efecto, de mayor a menor.

COMPONENTE	IDENTIDAD 1	RESINA A		GRANULADO B		INTERACCION AB	
a1b1	16	16		16			16
a2b1	17		17	17		17	
a1b2	10	10			10	10	
a2b2	23		23		23		23
TOTAL	66	26	40	33	33	27	39
VERIFICACION	66		66		66		66
FACTOR		-1	+1	-1	+1	-1	+1
NETO	66		14		0		12
DIVISOR	4		2		2		2
EFECTO	16.5		7		0		6
RANGO			1		3		2

Tabla 2.4 - Tabla de Respuestas del Experimento 2^2 , del Ejemplo 2

2.4.- Diagrama de Efectos. El Diagrama de Efectos es una representación gráfica de los efectos, que tiene por objeto comparar sus magnitudes. Se dibuja una línea horizontal, que representa el promedio global, o identidad, que en el caso del Ejemplo 2 es igual a 16.5. Luego se trazan verticales, centradas en la horizontal, cuyas longitudes son proporcionales a los efectos. Estos trazos se posicionan de tal forma que sus extremos estén todos sobre una recta diagonal; de esta manera, se visualiza mejor la forma en que se agrupan, de acuerdo a sus magnitudes.

El resultado, para el Ejemplo 2, es el siguiente, en el que se aprecia un fuerte efecto del factor A, y de la interacción AB, y ningún efecto del factor B.

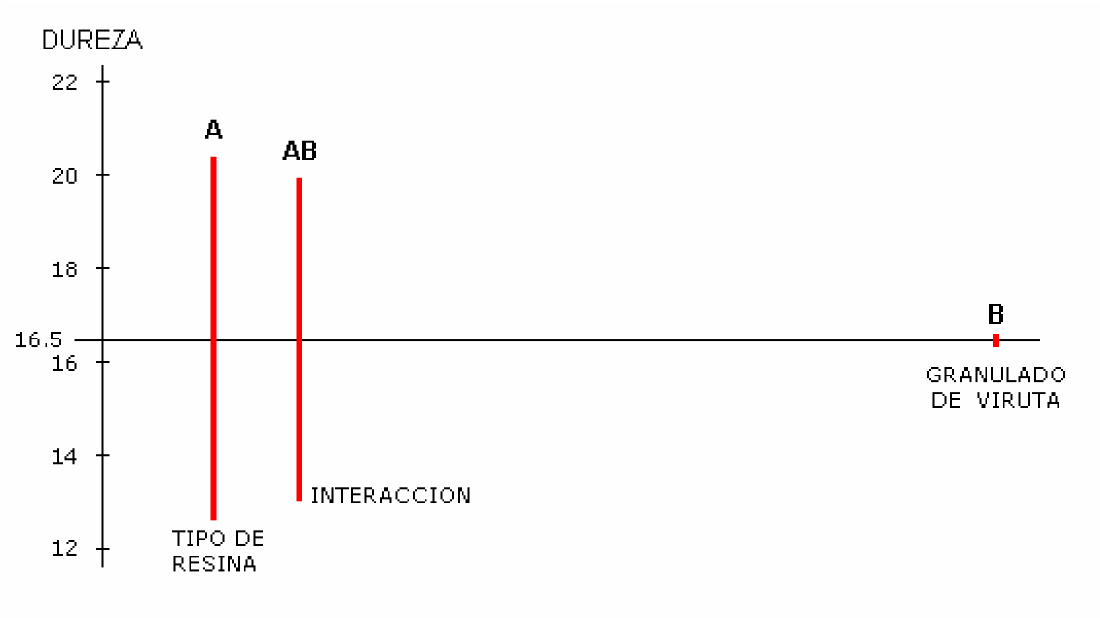


Figura 2.4 - Diagrama de Efectos del Ejemplo 2

2.5.- Aleatorización. El orden en que se hacen las cuatro corridas experimentales puede influir en los resultados, por diversos otros factores, desconocidos para el experimentador, como, por ejemplo, el aprendizaje que va adquiriendo el operador, una deriva de los instrumentos de medición, la variación en de los materiales experimentales asignados a cada una de las corridas, u otros posibles factores que afectan el resultado, en pequeña medida.

Por esa razón, el orden en que se efectúan los experimentos no es el orden en que aquí se presentan las combinaciones de tratamientos, y que se llama orden standard. El orden debe ser aleatorio, determinándose por sorteo o utilizando números tomados de una tabla de números aleatorios o generados por una calculadora. Esto es un seguro que protege contra efectos producidos por factores escondidos, que el experimentados desconoce.

2.6.- Réplicas. El grado de precisión con que se estiman los diversos efectos, como resultado de un experimento, se puede aumentar repitiendo las corridas experimentales que corresponden a cada combinación de tratamientos, un numero determinado de veces. También el hecho de tener réplicas permite estimar el efecto del error experimental, al disponer de medidas tomadas bajo las mismas condiciones experimentales.

Es deseable que el número de réplicas sea igual para cada combinación de tratamientos. En tal caso se dice que el experimento esta *balanceado*. Hay casos en que no es posible, o parte de la información se perdió, como por ejemplo, en un experimento agrícola, con plantas, algunas de las cuales se mueren durante el desarrollo de la experimentación, o bien por razones de costo, algunas corridas pueden ser muy caras, por lo que pueden repetirse menos veces. En tales casos se dice que el experimento está *desbalanceado*.

El calculo de los efectos principales e interacciones, con réplicas, en el caso balanceado, se hace de manera similar a la forma mostrada en el ejemplo anterior, solo que en lugar de la respuesta de cada combinación de tratamientos, se pone el promedio, a través de las replicas. El caso desbalanceado también permite hacer estas estimaciones, tomando los promedios.

ESTUDIO DE CASO : SECADO DE SANITARIOS.

Una empresa productora de loza tiene tres plantas: Vajillería, Azulejos y Sanitarios. En la planta de sanitarios existe una nave de proceso que incluye una subnave denominada de *colaje*.

En esta subnave hay 100 moldes de yeso, que se llenan de *pasta líquida,* una mezcla de arcilla con agua, más aditivos. Pasado cierto tiempo se produce el *colaje*, que consiste en que la pasta líquida se seca parcialmente dentro de los moldes, lo que da la forma al sanitario. Luego se desmoldan, y el operario colajero les hace el *despunte*, consistente en pulir la pieza y afinar sus dimensiones.

Terminadas las operaciones anteriores, se dejan secar los 100 sanitarios con sus respectivos moldes durante 24 horas, para extraer el agua en exceso que aún contienen.

Para efectuar el secado de los sanitarios y los moldes, se le inyecta aire caliente a la subnave, que está aislada térmicamente. El croquis de la página siguiente ilustra el proceso.

El proceso de secado debe se ser capaz de extraer el máximo contenido de agua de los artefactos, en el menor tiempo posible. Afectan a este variable, el caudal de aire inyectado a la subnave y la temperatura interior.

Para hacer más eficiente el proceso, se diseñó el experimento factorial que se describe a continuación.

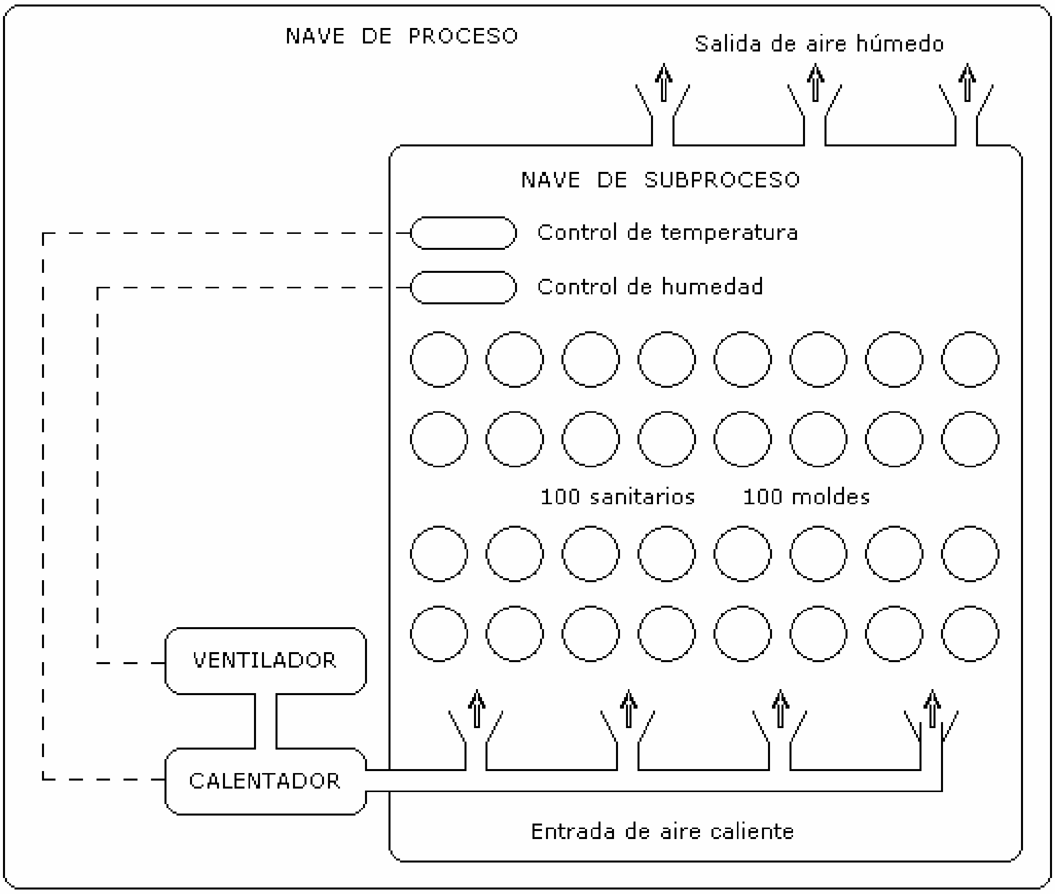


Figura 2.5 - Proceso de secado de sanitarios y moldes

OBJETIVO DEL EXPERIMENTO : El objetivo es optimizar el proceso de secado, en función de los factores controlables.

DISEÑO DEL EXPERIMENTO : Los factores son dos, con dos niveles cada uno, según se describe a continuación:

FACTORES	NIVELES
A : CAUDAL DE AIRE INYECTADO.	a_1 :. 15000 mt^3 por hora. a_2 :. 18000 mt^3 por hora.
B : TEMPERATURA INTERIOR.	b_1 : 30 ºC. b_2 : 40 ºC.

RESPUESTA : Cantidad de agua evaporada por día, en litros. Esta se mide pesando una muestra de sanitarios y moldes a las cero horas de cada día de secado. La diferencia entre los pesos de dos días consecutivos, es el peso del agua evaporada en el día. Como respuesta, se tomó el promedio de los días que duro el secado, redondeado al entero.

El experimento se condujo con cinco réplicas por combinación de tratamientos.
Los resultados se dan en la siguiente tabla:

COMBINACION DE TRATAMIENTOS	RESPUESTA REPLICA 1	REPLICA 2	PROMEDIO
a_1 b_1	790	810	800.0
a_2 b_1	874	903	888.5
a_1 b_2	835	853	844.0
a_2 b_2	927	945	936.0

El resultado del experimento, como se ve en el diagrama de efectos y en los gráficos de interacción, mostró una fuerte influencia del caudal de aire inyectado. Tambien hay efecto de la temperatura ambiente, aunque más débil. La interacción fue casi nula, lo que se aprecia en ambos gráficos. En los gráficos de interacción, se manifiesta en el paralelismo de las rectas. El efecto del factor caudal de aire se observa por la fuerte inclinación de las rectas del primer gráfico de interacción. en el otro, la inclinación es menor. A partir de estos resultados, se diseñaron nuevos experimentos, con el objeto de afinar el estudio.

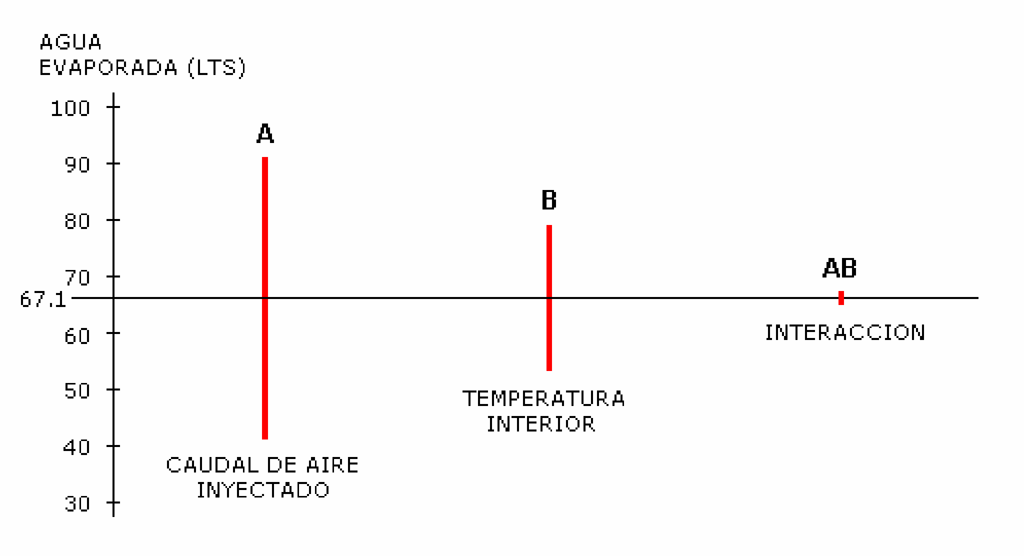


Figura 2.6 - Diagrama de Efectos

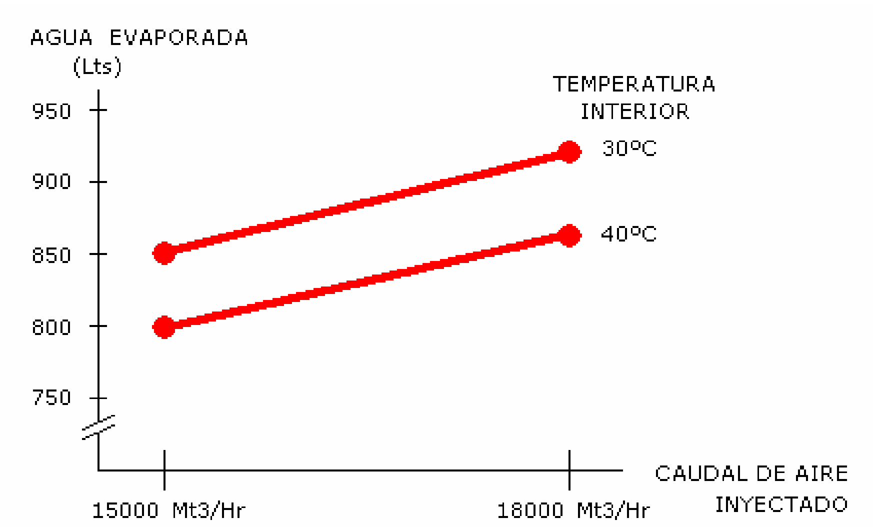


Figura 2. 7 - Gráfico de Interacción. Agua evaporada versus caudal de aire estratificado por temperatura.

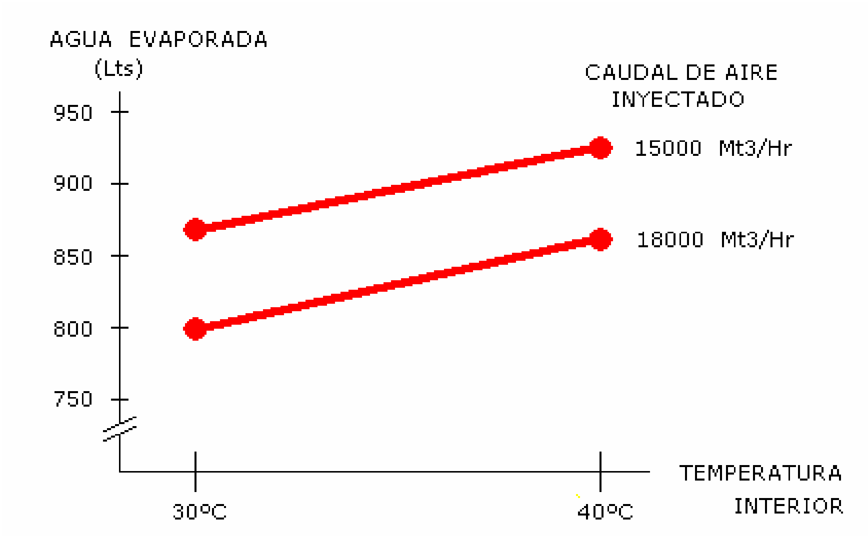


Figura 2. 8 - Gráfico de Interacción. Agua evaporada versus caudal de aire estratificado por temperatura.

□

EJERCICIOS

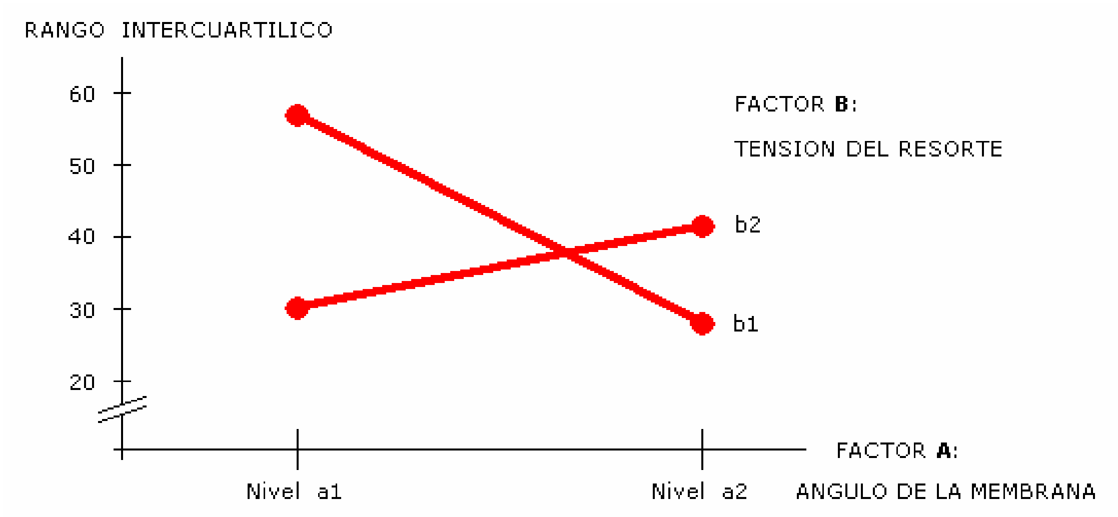
2.1) Una distribuidora de productos químicos, compra sus productos en partidas grandes, los reenvasa y los vende al detalle. Dispone de una maquina para vaciar compuestos líquidos oleaginosos, desde sus contenedores metálicos, a envases plásticos de un litro. Se desea modificar el dispositivo que controla el vaciado, de modo de lograr mayor precisión en la cantidad de liquido vertida en los envases plásticos. Para ello, se ha determinado que hay dos elementos que pueden modificarse sin gran dificultad, y que potencialmente inciden sobre la variable que se quiere controlar. Estos son, el ángulo de la membrana que cierra el conducto de salida y la tensión del resorte que la cierra.

Se realiza un experimento para probar el efecto de estos dos factores, con dos niveles cada uno. Los factores y sus niveles son:

FACTORES	NIVELES
A : ANGULO DE LA MEMBRANA	a_1 : 30º a_2 : 45º
B : TENSIÓN DEL RESORTE	b_1 : Simple b_2 : Doble

RESPUESTA : Es una medida de variabilidad de la cantidad de liquido vertido, el *rango intercuartílico*.

El siguiente gráfico de interacciones muestra las respuestas, versus el factor A, estratificado por B:



a) Construya el gráfico de interacción de la respuesta versus el factor B, estratificado por A. Agregue, en línea punteada, el gráfico de la respuesta versus el factor B, promediado sobre A (sin estratificar).

b) De la observación de cualquiera de los gráficos, determine si hay efecto de A, de B, y de interacción.

2.2) Un experimento consiste en observar el efecto del turno y del supervisor, sobre la calidad, en la fabricación de muebles. Hay dos turnos (mañana y tarde), y dos supervisores (supervisor 1 y supervisor 2). Se observa el número de fallas (imperfecciones) en los muebles producidos bajo cada una de las cuatro combinaciones de tratamientos, en tres réplicas cada una. La respuesta es el total de fallas observadas en las tres réplicas. La siguiente tabla resume las observaciones:

TURNO	SUPERVISOR	NUMERO DE FALLAS
MAÑANA	1	19
	2	23
TARDE	1	19
	2	21

a) Construya la tabla de respuestas y obtenga los valores de los efectos.

b) Dibuje el diagrama de efectos e interprete los resultados, en términos de si hay o no efectos principales e interacciones.

c) Construya los gráficos de interacción e interprételos. ¿Hay consistencia con lo observado en b) ?

2.3) Repita lo del ejercicio 2.2, para los siguientes datos:

COMBINACION DE TRATAMIENTOS	RESPUESTA
a_1b_1	27
a_2b_1	30
a_1b_2	31
a_2b_2	34

2.4) El procesos de producción de cátodos de cobre entrega un producto que no está libre de contaminantes. Uno de ellos es el cloruro, que no afecta las características físicas del cobre, sino que en el procesos de moldeo posterior, constituye en forma importante a contaminar el ambiente, razón por la cual se debe controlar la cantidad de este compuesto, de modo que no sobrepase un limite especificado. Para determinar la influencia del laboratorio que hace el análisis y de la técnica analítica utilizada, se diseñó un experimento a dos factores con dos niveles cada uno. El experimento consistió en analizar cátodos producidos en una misma partida, y por lo tanto de características similares. Los factores y sus niveles son:

FACTORES	NIVELES
A : LABORATORIO	a_1 : Testlab a_2 : Omega
B : TÉCNICA ANALÍTICA	b_1 : Método Directo b_2 : Método Indirecto

La respuesta es el contenido de cloruro, en partes por millón. El experimento se hizo con tres replicas. Los resultados son los siguientes:

COMBINACION DE TRATAMIENTOS	RESPUESTA
a_1b_1	312
a_2b_1	421
a_1b_2	211
a_2b_2	450

a) Construya la tabla de respuestas y obtenga los valores de los efectos.

b) Dibuje el diagrama de efectos e interprete los resultados, en términos de si hay o no efectos principales e interacciones.

CAPITULO 3

DISEÑOS FACTORIALES CON TRES FACTORES A DOS NIVELES

Los diseños 2 son diseños en que hay tres factores, cada uno con dos niveles. El número de combinaciones de tratamientos ahora es 8 ($= 2^3$). Al introducir un tercer factor en el experimento, con dos niveles, se duplica el número total de corridas. Identificaremos al tercer factor con la letra C, y sus niveles los designamos c y c, respectivamente.

ESTUDIO DE CASO : EFECTO DE CATALIZADORES EN LA EMISION DE SO_2 A LA ATMOSFERA, EN UNA PLANTA DE PRODUCCION DE ACIDO SULFURICO.

En la producción de ácido sulfúrico, hay emisión de dióxido de azufre (SO_2), compuesto polucionante de la atmósfera. El uso de catalizadores en los convertidores de plantas de Acido Sulfúrico, que permiten la transformación de SO_2 a trióxido de azufre (SO_3) dentro del proceso de producción, disminuye la emisión de SO_2 a la atmósfera.

Los catalizadores son cilindros de 10 mm de diámetro y 10 mm de alto, que contienen pentóxido de vanadio. Estos son colocados en capas, en el convertidor catalítico de la planta, que permite oxidar el SO_2 contenido en los gases de alimentación, transformándolo en SO_3.

Normalmente los catalizadores tienen las especificaciones requeridas, de acuerdo a la información entregada por los proveedores. Por lo que la decisión de comprar una marca específica, queda determinada por el precio.

Se diseñó un experimento, con el objeto de que la decisión tenga un soporte técnico, basado en los resultados operacionales obtenidos.

<u>OBJETIVO DEL EXPERIMENTO</u> : El objetivo del experimento es evaluar el comportamiento de dos marcas de catalizadores, utilizados en los convertidores de plantas de Acido Sulfúrico.

<u>DISEÑO</u> : El experimento se diseñó a tres factores, con tres niveles cada uno, que se describen a continuación:

<u>FACTORES</u>	<u>NIVELES</u>
A : Catalizador.	a_1 : Catalizador tipo I. a_2 : Catalizador tipo II.
B : Tiempo de operación.	b_1 : 1 mes. b_2 : 12 meses.
C : Flujo de gas.	c_1 : 348 a 891 m^3/hora. c_2 : 1139 a 1867 m^3/hora.

<u>RESPUESTA:</u> Factor de emisión de SO_2 a la atmósfera, expresada en porcentaje. Este es medido instantáneamente, con instrumentación en linea.

Se hicieron siete réplicas de cada combinación de tratamientos, lo que dió 56 corridas experimentales.

□

En un experimento 2^3, el número de combinaciones distintas de niveles de los tres factores, o combinaciones de tratamientos, que se pueden aplicar, los simbolizamos de la forma siguiente:

CORRIDA EXPERIMENTAL	COMBINACION DE TRATAMIENTOS	RESPUESTA
1	$a_1b_1c_1$	Y_{111}
2	$a_2b_1c_1$	Y_{211}
3	$a_1b_2c_1$	Y_{121}
4	$a_2b_2c_1$	Y_{221}
5	$a_1b_1c_2$	Y_{112}
6	$a_2b_1c_2$	Y_{212}
7	$a_1b_2c_2$	Y_{122}
8	$a_2b_2c_2$	Y_{222}

Tabla 3.1 - Tabla de Combinaciones de Tratamientos del Diseño Experimental 2^3.

Al igual que en el caso 2^2 , los símbolos de la segunda columna pueden usarse para representar, además de la particular combinación de tratamientos, el valor numérico de la respuesta respectiva, en lugar de utilizar los símbolos de la tercera columna. Por lo tanto el símbolo $a_1b_2c_1$ representa a la combinación de tratamientos en que el factor A está al nivel a_1 , B está al nivel b_2 y C está al nivel c_1 .O bien, también representa al número Y, la respuesta de esa particular combinación de tratamientos. El gráfico siguiente ilustra en forma esquemática, los elementos de este diseño.

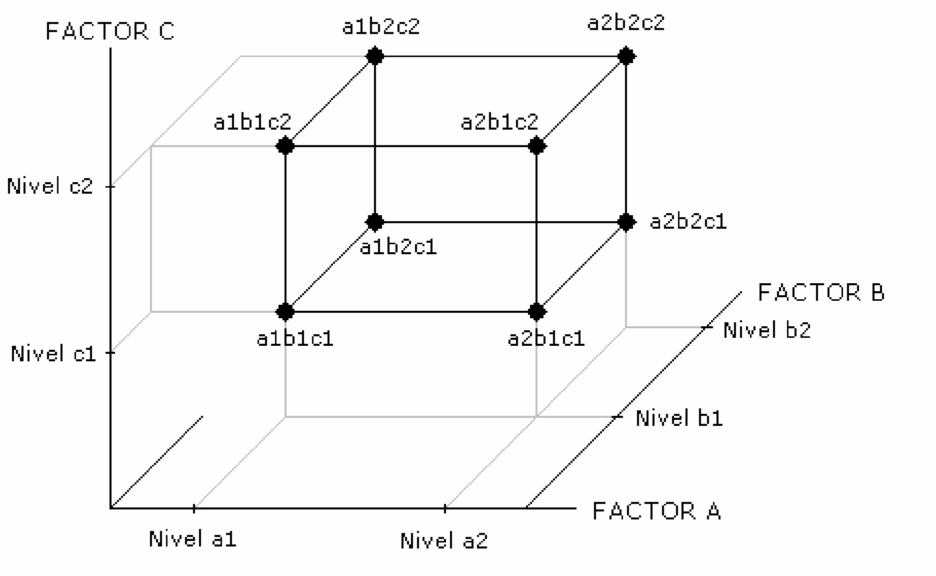


Figura 3.1 - Representación Gráfica del Experimento 2^3.

ESTUDIO DE CASO : LEY DE CAL LIBRE EN EL PROCESO DE PRODUCCION DE CAL.

El proceso de producción de cal comienza con la introducción de carbonato de calcio ($CaC0_3$) en un horno rotatorio de velocidad variable, en cuyo extremo de salida hay un quemador que produce una temperatura de alrededor de 1200 ºC en la zona de calcinación.

Con el objeto de mejorar la calidad del producto, es necesario controlar las fuentes de variación de la ley de cal libre, CaO.

Para este fin, se diseñó un experimento para medir el efecto de tres variables de operación, sobre la calidad del producto.

DISEÑO DEL EXPERIMENTO : Se diseñó a tres factores, a dos niveles cada uno: Tamaño de la carga, Velocidad de Giro, y Calor, de acuerdo a la siguiente descripción:

FACTORES	NIVELES
A : TAMAÑO DE LA CARGA	a_1 : Granulometría de ¼ a ¾ plg. a_2 : Granulometría de ¾ a 1½ plg.
B : VELOCIDAD DE GIRO	b_1 : Bajo 1.5 rpm. b_2 : Sobre 1.5 rpm.
C : CALOR	b_1 : Bajo 1200 ºC. b_2 : Sobre 1200 ºC.

RESPUESTA : La respuesta es la ley de cal libre, medida en porcentaje de ley.

LIMITACIONES : Algunos posibles factores no deseados que puedan la respuesta son:

El $CaCO_3$ introducido al horno puede variar su concentración de CaO, con lo cual los resultados serian afectados. Si se analiza la concentración de CaO en el $CaCO_3$, este efecto puede ser minimizado corrigiendo la respuesta .

El tiempo de residencia del $CaC0_3$ en el horno debe ser considerado antes de cada corrida, a fin de que la respuesta medida corresponda realmente a lo que se desea medir y no a residuos experimento anterior. Por ello se efectúa una corrida experimental en un día completo, y se observan los resultados de todo un día.

□

ESTUDIO DE CASO : ANALISIS DE LABORATORIO PARA LA DETERMINACION DE CONTENIDO DE CLORURO EN CATODOS DE COBRE.

El cátodo de cobre es el principal producto que produce una compañía productora de cobre. Es obtenido electrolíticamente, por alguno de los siguientes tres procedimientos: De soluciones provenientes de los procesos cuyos minerales son directamente solubles en ácido sulfúrico. O bien por una preconcentración del deshecho de la etapa anterior, por un sistema de percolación in situ y posterior separación con un solvente orgánico. El tercer procedimiento consiste en la refinación de cobre blister de los procesos en que se trata el cobre provenientes de minerales insolubles en ácido sulfurico, y que se concentran en etapas de flotación y fusión.

Aparte de la pureza en el contenido del elemento principal, son importantes algunos elementos que no es posible eliminar del todo, y que se llaman impurezas. La naturaleza y cantidad de éstas, de alguna manera determina el destino final que se le da a este producto.

Dependiendo del uso que se le dará al producto, hay especificaciones sobre los porcentajes máximos de contenido de determinados elementos. A mayores concentraciones de impurezas, menor es el precio de venta del producto.

Por esa razón, es preocupación importante de la empresa, poder contar, en sus procesos, con sistemas que reduzcan en forma importante la cantidad de impurezas.

Uno de los elementos que interesa controlar es el cloruro, cuya presencia produce contaminación ambiental, durante los procesos de moldeo, laminado, etc.

Para poder controlar la presencia de este elemento, se debe contar con un sistema de análisis de laboratorio confiable. Para analizar, se selecciona una muestra aleatoria de cátodos, los que se perforan para obtener virutas, que son disueltas en ácido nítrico. La presencia del ión plata precipita el cloruro en forma de cloruro de plata.

Se puede pesar el cloruro de plata sólido, para cuantificar el contenido de cloruro. Este se denomina método directo. Como alternativa, se puede disolver el cloruro de plata en exceso de ácido clorhídrico, y así cuantificar el cloruro. Este se denomina Método Indirecto.

Un problema que existe, es la no homogeneidad en la distribución del cloruro en el cátodo. Esto ocasiona serias dificultades para lograr una buena precisión en los resultados del análisis.

OBJETIVO DEL EXPERIMENTO : El objetivo es conocer la influencia de los potenciales factores que afectan la precisión de la cuantificación del cloruro en muestras de cátodos de cobre.

DISEÑO : Se diseñó a tres factores, con dos niveles cada uno. El primer factor es el laboratorio, a fin de investigar el efecto de que la muestra sea tratada en diversos ambientes. El segundo factor es la masa de muestra; se piensa que el aumentar su tamaño, tiende a homogenizar su contenido. El tercero es el método de análisis, directo o indirecto.

FACTORES	NIVELES
A : Laboratorio.	a_1 : Laboratorio Chuquicamata. a_2 : Laboratorio Antofagasta.
B : Masa de muestra.	b_1 : 50 gramos. b_2 : 10 gramos.
C : Técnica analítica.	c_1 : Método directo. c_2 : Método indirecto.

RESPUESTA: La respuesta es la concentración cuantitativa del cloruro, en partes de cloruro por millón de partes de cátodo de cobre.

Para asegurar la homogeneidad del material a analizar, se obtuvieron 10 muestras distintas, y cada una se dividió en ocho porciones, cada una de las cuales se utilizó para una combinación de tratamientos. Las diez muestras constituyeron diez réplicas.

□

3.1.- Matriz de Diseño del Experimento 2^3 . En forma similar a como se hizo en el caso del diseño 2^2 , podemos combinar las respuestas en diversas formas, para estimar los diferentes efectos. Por ejemplo,el número

$$A = \tfrac{1}{4} (a_2b_1c_1 + a_2b_2c_1 + a_2b_1c_2 + a_2b_2c_2 - a_1b_1c_1 - a_1b_2c_1 - a_1b_1c_2 - a_1b_2c_2)$$

es la diferencia entre todas las respuestas que resultan de aplicar el nivel alto del factor A, menos todas las respuestas que resultan de aplicar el nivel bajo del mismo factor. Es, pues, una medida del efecto del factor A. Usaremos el símbolo A para indicar esta medida, que llamamos efecto A. De forma análoga, el efecto del factor B, es

$$B = \tfrac{1}{4} (a_1b_2c_1 + a_2b_2c_1 + a_1b_2c_2 + a_2b_2c_2 - a_1b_1c_1 - a_2b_1c_1 - a_1b_1c_2 - a_2b_1c_2)$$

y el efecto del factor C es

$$C = \tfrac{1}{4} (a_1b_1c_2 + a_2b_1c_2 + a_1b_2c_2 + a_2b_2c_2 - a_1b_1c_1 - a_2b_1c_1 - a_1b_2c_1 - a_2b_2c_1)$$

Observemos que si hacemos un poco de álgebra con estas expresiones, como si fueran expresiones algebraicas, lo que en realidad no son, podemos factorizarlas, obteniendo notaciones formales que utilizaremos en forma equivalente. Ellas son,

$$A = \tfrac{1}{4} ((a_2 - a_1)(b_2 + b_1)(c_2 + c_1))$$

$$B = \tfrac{1}{4} ((a_2 + a_1)(b_2 - b_1)(c_2 + c_1))$$

$$C = \tfrac{1}{4} ((a_2 + a_1)(b_2 + b_1)(c_2 - c_1))$$

Pero hay más expresiones similares que podemos formar, y que trataremos de intrerpretar, como por ejemplo,

$$\tfrac{1}{4} (a_1b_1c_1 + a_2b_1c_1 + a_1b_2c_2 + a_2b_2c_2 - a_1b_2c_1 - a_2b_2c_1 - a_1b_1c_2 - a_2b_1c_2)$$

que podemos escribir como

$$\tfrac{1}{4} ([(a_1b_2c_2 + a_2b_2c_2) - (a_1b_1c_2 + a_2b_1c_2)]$$

$$- [(a_1b_2c_1 + a_2b_2c_1) - (a_1b_1c_1 + a_2b_1c_1)])$$

El primer paréntesis cuadrado es una diferencia entre el resultado de aplicar el factor B al nivel alto menos el resultado de aplicarlo al nivel bajo, todo bajo el nivel alto de C. En resúmen, es el efecto de B bajo la presencia de C. El segundo paréntesis es lo mismo, pero al nivel bajo de C, o el efecto de B en ausencia de C. Entonces la expresión completa mide la diferencia entre los efectos del factor B bajo los dos niveles del factor C, promediada a través de todos los niveles del factor A. Esta medida se denomina interacción entre B y C, y la simbolizamos BC. Observemos que la podemos expresar tambien, siguiendo el análogo algebraico, como

$$BC = \tfrac{1}{4} ((a_2 + a_1)(b_2 - b_1)(c_2 - c_1))$$

De manera similar,

$$AB = \tfrac{1}{4} ((a_2 - a_1)(b_2 - b_1)(c_2 + c_1))$$

$$\text{y} \quad AC = \tfrac{1}{4} ((a_2 - a_1)(b_2 + b_1)(c_2 - c_1))$$

representan las interacciones entre A y B, y entre A y C, respectivamente. Las tres primeras expresiones, es decir A, B y C, representan lo que se denominan efectos principales.

Por último, quedan dos expresiones más que es posible formar, y que sería interesante tratar de interpretar. Ellas son

$$\tfrac{1}{4} ((a_2 - a_1)(b_2 - b_1)(c_2 - c_1))$$

$$\text{y} \quad \tfrac{1}{4} ((a_2 + a_1)(b_2 + b_1)(c_2 + c_1))$$

La primera corresponde al número

$$\tfrac{1}{4} (a_2b_1c_1 + a_1b_2c_1 + a_1b_1c_2 + a_2b_2c_2 - a_2b_2c_1 - a_1b_2c_2 - a_2b_1c_2 - a_1b_1c_1)$$

$$= \tfrac{1}{4} ([(a_2b_1c_1 - a_2b_2c_1) - (a_1b_1c_1 - a_1b_2c_1)]$$

$$- [(a_2b_1c_2 - a_2b_2c_2) - (a_1b_1c_2 - a_1b_2c_2)])$$

y es la diferencia (bajo los dos niveles de C), entre las diferencias de los efectos de B, bajo los dos niveles de A. Es lo que se denomina interacción entre A, B y C, o interacción triple. La simbolizamos ABC.

Observemos que las siete expresiones vistas hasta aquí, los efectos principales, las interacciones dobles y la interacción triple, tienen la particularidad de que al desarrollarlas, tienen cuatro términos o componentes positivas y cuatro negativas. Al igual que en el caso del diseño 2 , una expresión que tiene el mismo número de componentes positivas que negativas se denomina contraste.

La última expresión,

$$\tfrac{1}{8} ((a_2 + a_1)(b_2 + b_1)(c_2 + c_1))$$

es igual a

$$\tfrac{1}{8} ((a_1b_1c_1 + a_2b_1c_1 + a_1b_2c_1 + a_2b_2c_1 + a_1b_1c_2 + a_2b_1c_2 + a_1b_2c_2 + a_2b_2c_2)$$

y no es un contraste, pues todos los términos aparecen con signo positivo. La simbolizamos por 1, y no es una comparación entre los efectos provocados por diversas combinaciones de tratamientos. Tiene ú términos con signo (+), en lugar de á, como los contrastes. Por eso lo dividimos por ú y no por á, como los anteriores; ahora promediamos ú cantidades, antes promediábamos 4 diferencias. Proporciona una medida del efecto promedio de todos los tratamientos.

Construiremos una matriz de diseño, como en el caso 2 . La expresión para un efecto consiste en una colección ordenada de los símbolos (+) y (-), que indican el signo de la componente asociada a la correspondiente combinación de tratamientos. Hay que convenir en el orden de las combinaciones de tratamientos para saber qué mide cada una. Mantengamos el orden introducido en la representación anterior, llamado orden standard, es decir,

$$a_1b_1c_1,\ a_2b_1c_1,\ a_1b_2c_1,\ a_2b_2c_1,\ a_1b_1c,\ a_2b_1c_2,\ a_1b_2c_2,\ a_2b_2c_2$$

Igual que antes, una expresión es un contraste si tiene tantos (+) como (-). De esta forma

(-,+,-,+,-,+,-,+), (-,-,+,+,-,-,+,+) y (-,-,-,-,+,+,+,+,)

son contrastes. Estos contrastes son A, B y C, respectivamente. Esto se puede verificar fácilmente, recordando que donde hay un (+), la respectiva combinación de tratamientos va con un signo más, y donde hay un (-), con sigmo menos.

Como en el caso 2 , dos contrastes se pueden "multiplicar" comparando los pares de componentes que están en la misma posición relativa en ambos contrastes que se están multiplicando. Al resultado se le asigna, en la misma posición relativa, un (+) si ambas componentes de los multiplicandos son iguales, y un (-) si son distintos. Esto se repite para cada componente. De esta manera, AxB es igual a

(-,+,-,+,-,+,-,+) x (-,-,+,+,-,-,+,+) = (+,-,-,+,+,-,-,+)

Obsérvese que aquí también el resultado de multiplicar A por B es precisamente la interacción AB. Si "x" representa la multiplicación de contrastes, definida arriba, podemos decir que AxB = AB, igualdad que facilita la construcción de la Matriz de Diseño.

Si el resultado de multiplicar dos contrastes es un contraste, como en el ejemplo anterior, se dice que los contrastes que y C son ortogonales entre sí, tomados de a pares, lo que se puede verificar fácilmente. Sin embargo, A no es ortogonal con el contraste (-,+,+,+,-,-,-,+), pues el producto es igual a (+,+,-,+,+,-,+,+), que no es contraste por tener seis (+) y dos (-).

Con paciencia se puede ver que si se multiplican los contrastes A, B y C, de a pares, y despu,s los resultados se multiplican entre si y por los originales, y así sucesivamente, sólo aparecerán ó contrastes distintos, todos los demás estarán repetidos. En realidad, en un experimento 2^3 el máximo número de contrastes ortogonales que se puede encontrar es ó. En un experimento 2^2 es 3, en un 2^4 es 15, etc. En general, en un experimento 2^k, el número de contrastes ortogonales que se puedeencontrar es 2^k - 1. Podemos completar el conjunto, para que sean 2^k , con la expresión que tiene sólo (+), que llamamos identidad, y que designamos por 1. No es contraste, pero tiene la particularidad de que al multiplicarlo por otro contraste, uso del 1 como símbolo. Además, un contraste multiplicado por si mismo da la identidad. De esta forma, por ejemplo, A es igual a 1, ABxAB es igual a 1, ABCxC, que se puede denotar como ABC^2 , es lo mismo que AB, A^2BC^2 es igual a B, etc.

Todas las expresiones contenidas en un conjunto ortogonal tienen interpretación. En el experimento 2^3 , el conjunto de contrastes ortogonales está constituído por los efectos principales A, B y C, las interacciones dobles AB, AC y BC, y la interacción triple ABC. También contiene la identidad (que no es contraste). La tabla siguiente contiene el conjunto de los siete contrastes ortogonales de 2^3 y su identidad. Se agregó una columna con las combinaciones de tratamientos que intervienen en las expresiones, para verificar que efectivamente miden lo que se señala con el símbolo con que se designa cada contraste. La tabla permite efectuar los productos. Se denomina *Matriz de Diseño* del experimento 2^3.

COMBINACION DE TRATAMIENTOS	CONTRASTES							
	1	A	B	AB	C	AC	BC	ABC
$a_1b_1c_1$	+	-	-	+	-	+	+	-
$a_2b_1c_1$	+	+	-	-	-	-	+	+
$a_1b_2c_1$	+	-	+	-	-	+	-	+
$a_2b_2c_1$	+	+	+	+	-	-	-	-
$a_1b_1c_2$	+	-	-	+	+	-	-	+
$a_2b_1c_2$	+	+	-	-	+	+	-	-
$a_1b_2c_2$	+	-	+	-	+	-	+	-
$a_2b_2c_2$	+	+	+	+	+	+	+	+

Tabla 3.2 - Matriz de Diseño del Experimento 2^3

ESTUDIO DE CASO : MATERIALES AISLANTES DE RUIDO, PARA ENCERRAMIENTO DE UNA MAQUINA DE FORJA.

Se efectuó un estudio con el objeto de evaluar el comportamiento de materiales absorbentes de ruido, tales como goma de 1/2 de pulgada de espesor, y virutilla de l/4 de pulgada de espesor, combinada con Internit de 4 mm. de espesor, con la finalidad de determinar el o los materiales más adecuados para fabricar un encerramiento de una fuente sonora, consistente en una máquina de forja.

Además se requiere probar estos materiales en función de dos niveles de frecuencias críticas de sonido, que son 500 y 4000 hz.

Al mismo tiempo se quiso comprobar que el nivel de presión sonora es inversamente proporcional a la distancia de la fuente sonora. Se consideraron distancias a 1 y de 4 mts.

OBJETIVOS DEL EXPERIMENTO : Investigar el comportamiento de materiales absorbentes de ruido, factibles de ser usados en encerramiento de las fuentes sonoras para la atenuación de las frecuencias fundamentales de 500 y 4000 hz.

DISEÑO DEL EXPERIMENTO : Es un experimento a tres factores, con dos niveles cada uno, a una réplica por cada combinación de tratamientos, según la siguiente descripción:

FACTORES NIVELES

A : MATERIAL ABSORBENTE.
a_1 : Goma de ½ pulgada de espesor.
a_2 : Virutilla de ¼ de pulgada de espesor entre dos placas de Internit de 4 mm. de spesor.

B : FRECUENCIA DE SONIDO.
b_1 : 500 hz.
b_2 : 4000 hz.

C : DISTANCIA A LA FUENTE EMISORA.
c_1 : 1 mt.
c_2 : 4 mts.

RESPUESTA: La respuesta es el nivel de decibeles del ruido. Se usó un sonómetro de precisión Bruel Kjaer 2203, que cumple con las normas de sonómetro. El equipo se utilizó con un micrófono con la extensión UAD 196 de acuerdo a normas. Este instrumento lleva incorporado el analizador de frecuencia 1613 que posee una gama de frecuencias centrales de 31,5 hz. a 31,5 Khz. Tipo de análisis, de bandas de octavas.

REALIZACIÓN DEL EXPERIMENTO: Todas las mediciones se realizaron un día domingo en la madrugada, desde las 01:00 a las 06:00 hrs. El ruido de fondo era de baja intensidad, aproximadamente 40 decibeles. Antes y después de usar el sonómetro, se verificó la calibración acústica, utilizando un pistófono 4220, dando siempre la lectura de 124 decibeles en 250 hz.

Los resultados obtenidos fueron los siguientes:

COMBINACION DE TRATAMIENTOS	RESPUESTA
$a_1b_1c_1$	Y_{111} = 96 db
$a_2b_1c_1$	Y_{211} = 91 db.
$a_1b_2c_1$	Y_{121} = 90 db.
$a_2b_2c_1$	Y_{221} = 92 db.
$a_1b_1c_2$	Y_{112} = 92 db.
$a_2b_1c_2$	Y_{212} = 89 db.
$a_1b_2c_2$	Y_{122} = 86 db.
$a_2b_2c_2$	Y_{222} = 90 db.

3.2.- Tabla de Respuestas y Diagrama de Efectos del Experimento 2^3 . Como en el caso 2^2, introduciremos una forma tabular de presentar las respuestas, es decir, los valores observados de la variable Y, bajo las distintas combinaciones de tratamientos. Esta tabla permite efectuar los cálculos necesarios para medir los efectos de cada factor y de sus interacciones.

La tabla se organiza de la forma como indica la matriz de diseño, dejando dos columnas por cada contraste. La columna de la izquierda se utiliza para copiar las respuestas en que los contrastes tienen un signo (+), la de la derecha para copiar las respuestas en que hay un signo (-). El valor que se copia en las casillas de cada fila (horizontal) es la respuesta Y, correspondiente a la respectiva combinación de tratamientos. Abajo de la tabla se agregan filas para las sumas, promedios, efectos, y otros cálculos que se desee efectuar. El divisor corresponde al número de términos que hay en cada columna.

EJEMPLO 3.1. Construiremos la Tabla de Respuestas con un ejemplo numérico. Spongamos que bajo las distintas combinaciones de tratamientos, *Presion* (A), *Temperatura* (B), le agregamos un tercer factor, *Tiempo de Aplicación* (C), con dos niveles. Como respuesta, se obtienen los siguientes índices de *Dureza* (Y):

COMBINACION DE TRATAMIENTOS	INDICE DE DUREZA RESULTANTE (y)
$a_1b_1c_1$	49
$a_2b_1c_1$	43
$a_1b_2c_1$	69
$a_2b_2c_1$	67
$a_1b_1c_2$	46
$a_2b_1c_2$	23
$a_1b_2c_2$	66
$a_2b_2c_2$	61

Tabla 3.3 - Respuestas obtenidas en el Experimento 2^3

La Tabla de Respuestas completa es la siguiente:

COMPO-NENTE	1	A		B		AB		C		AC		BC		ABC	
$a_1b_1c_1$	49	49		49			49	49			49		49	49	
$a_2b_1c_1$	43		43	43		43		43		43			43		43
$a_1b_2c_1$	69	69			69	69		69			69	69			69
$a_2b_2c_1$	67		67		67		67	67		67		67		67	
$a_1b_1c_2$	46	46		46			46		46	46		46			46
$a_2b_1c_2$	23		23	23		23			23		23	23		23	
$a_1b_2c_2$	66	66			66	66			66	66			66	66	
$a_2b_2c_2$	61		61		61		61		61		61		61		61
TOTAL	424	230	194	161	263	201	223	228	196	222	202	205	219	205	219
VERIF.			424		424		424		424		424		424		424
FACTOR	1	-1	1	-1	1	-1	1	-1	1	-1	1	-1	1	-1	1
NETO	424		36		102		22		32		20		14		14
DIVISOR	8		4		4		4		4		4		4		4
EFECTO	53.0		9.0		25.5		5.5		8.0		5.0		3.5		3.5
RANGO			2		1		4		3		5		6		6

Tabla 3.4 - Tabla de Respuestas del Experimento 2^3 , del Ejemplo 3.

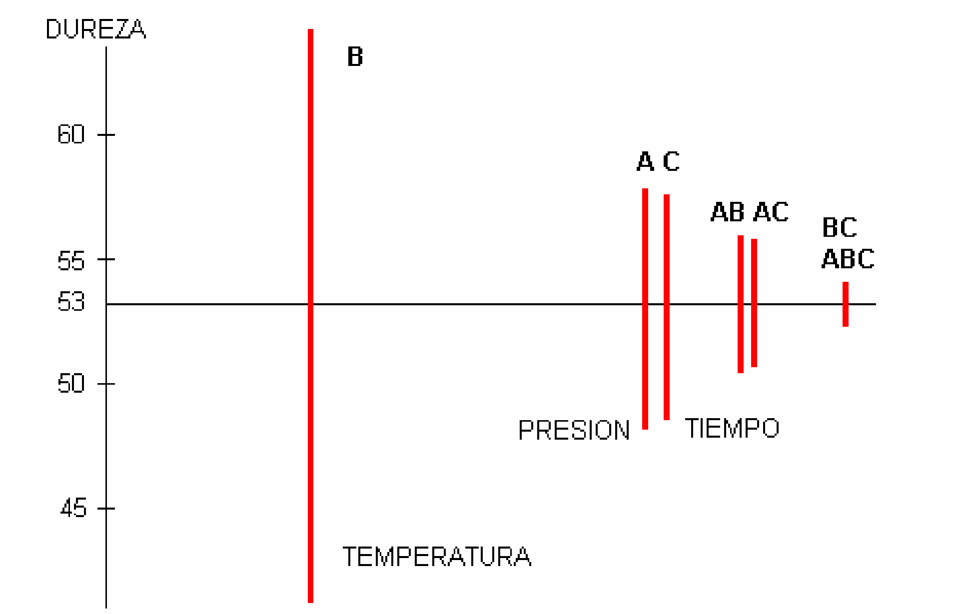


Figura 3.2 - Diagrama de Efectos del Experimento Factorial 2^3

La fila de verificación debe dar la misma suma en todas las casillas, y es igual al total de la columna de la identidad. El Neto es el valor absoluto de la suma ponderada por el respectivo factor. El Divisor es el número de sumandos con el mismo factor. El Efecto es el Neto dividido por el Factor. El Rango es el orden de magnitud del Efecto. El siguiente es el Diagrama de Efectos de estos resultados. Se ve que hay un fuerte efecto de B, efectos moderados de A y C, débiles interacciones AB y AC, y muy débiles interacciones BC y ABC.

3.3.- Gráficos de Interacción. Otra forma de visualizar los efectos principales y las interacciones dobles, es mediante los gráficos de interacción. Para construirlos, se hace una tabla similar a la Tabla de Respuestas, pero sólo con la columna de la identidad y las columnas de las interacciones dobles. El resultado es el siguiente:

COMBINACION DE TRATAMIENTO	1	AB				BC				AC			
		a_1b_1	a_2b_1	a_1b_2	a_2b_2	b_1c_1	b_2c_1	b_1c_2	b_2c_2	a_1c_1	a_2c_1	a_1c_2	a_2c_2
$a_1b_1c_1$	49	49				49				49			
$a_2b_1c_1$	43		43				43			43			
$a_1b_2c_1$	69			69		69					69		
$a_2b_2c_1$	67				67		67				67		
$a_1b_1c_2$	46	46						46				46	
$a_2b_1c_2$	23		23						23			23	
$a_1b_2c_2$	66			66				66					66
$a_2b_2c_2$	61				61				61				61
TOTAL	424	95	66	135	128	118	110	112	84	92	136	69	127
VERIFICACION					424				424				424
PROMEDIO	53.0	47.5	33.0	67.5	64.0	59.0	55.0	56.0	42.0	46.0	68.0	34.5	63.5

Tabla 3.5 - Tabla de Respuestas para la Construcción de Gráficos de Interacción

Cada una de las columnas de las interacciones dobles se disgrega en cuatro columnas en lugar de dos, como se hizo en la tabla anterior. La columna AB se divide en una columna donde van las respuestas correspondientes a las combinaciones de tratamientos en que A = a_1 y B = b_1 ; otra donde A = a_2 y B = b_1 ; otra donde A = a_1 y B = b_2 ; y la última, donde A = a_2 y B = b_1 .

Los cuatro promedios que aparecen en cada una de las interacciones, se usan para construir los respectivos gráficos de interacción que se presentan a continuación. En el gráfico de AB, las líneas llenas muestran, en sus extremos, las respuestas promedio de a y de a , cada una bajo los dos dintintos niveles de B. La línea punteada muestra el promedio a través de ambos niveles de B. Los valores para la línea punteada se pueden obtener de la Tabla de Respuestas original.

Los gráficos de interacción se interpretan de la siguiente forma: Si la línea punteada es horizontal, entonces no hay efecto del factor que se muestra en el eje horizontal; si tiene pendiente, entonces hay efecto. Si las líneas llenas están a la misma altura, entonces no hay efecto del otro factor mostrado en el gráfico. Si las líneas tienen igual pendiente, entonces no hay interacción; si la pendiente de ambas es distinta, si la hay.

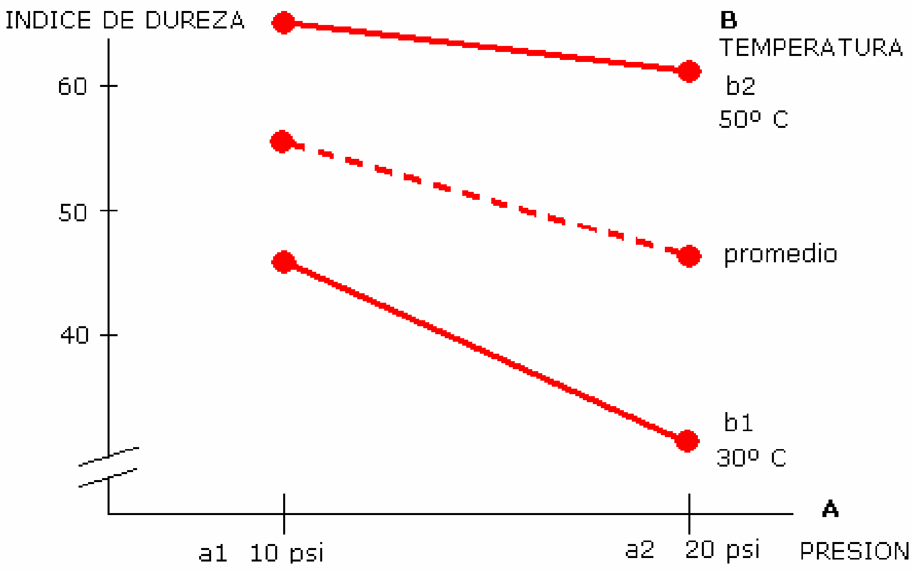


Figura 3.3 - Grafico de interaccion de Indice de Dureza vs. Presión, estratificado por Temperatura

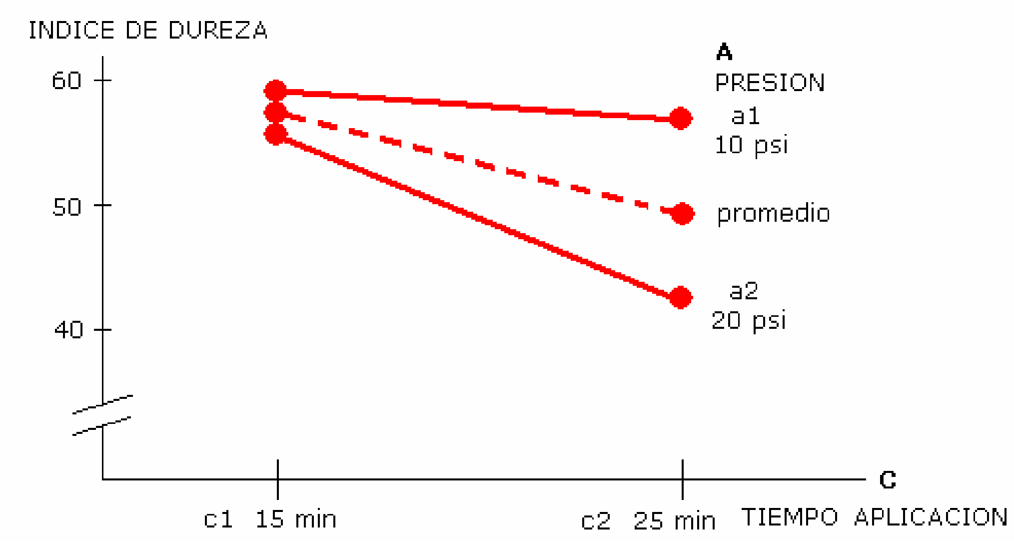


Figura 3.4 - Grafico de interaccion de Indice de Dureza vs. Tiempo, estratificado por Presión

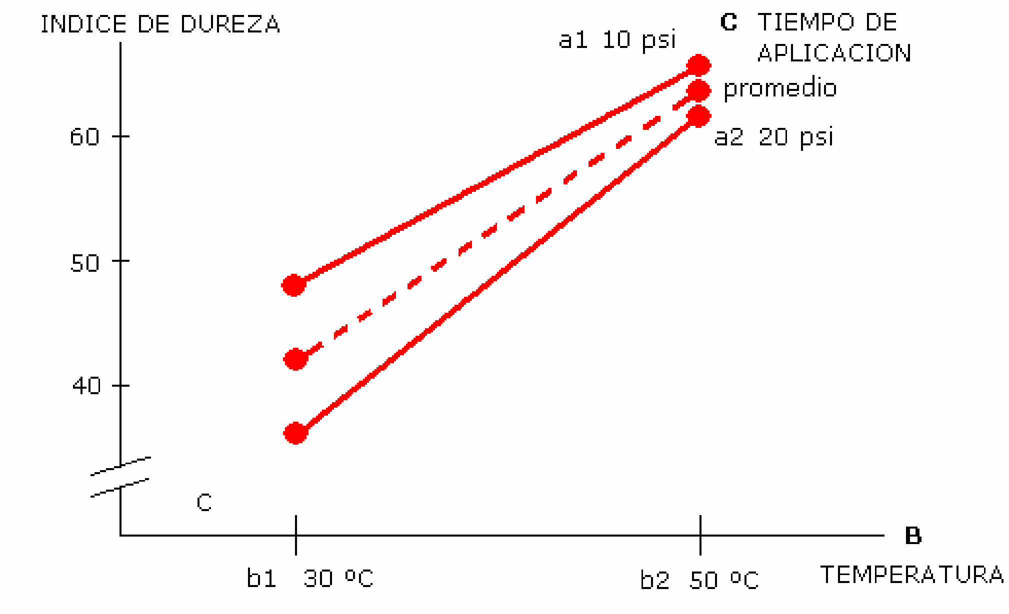


Figura 3.5 - Grafico de interaccion de Indice de Dureza vs. Temperatura, estratificado por Tiempo de aplicación

En los gráficos mostrados, podemos observar que: Casi no hay efecto de A, ni hay interacción BC. La interacción AC es muy pequeña, hay efectos de B y de C, y finalmente, hay una fuerte interacción entre A y B.

ESTUDIO DE CASO : OPTIMIZACION DE LA PLASTICIDAD DE UN COMPUESTO DE CAUCHO DE LA BANDA DE RODAMIENTO DE NEUMATICOS.

Se diseñó una experiencia para mejorar las propiedades del compuesto para banda de rodamiento de neumáticos, durante la fase de vulcanización, buscando optimizar la plasticidad del compuesto. Se sabe que la calidad del compuesto dependen del tipo de caucho utilizado, y de los acelerantes. Los acelerantes son compuestos que ayudan a la vulcanización de los cauchos, y los activadores del acelerante actúan como catalizadores.

OBJETIVO DEL EXPERIMENTO : El objetivo es buscar una combinación de compuesto que permita disminuir los ciclos de vulcanización de los neumáticos que utilicen este compuesto, a fin de hacer el proceso más eficiente.

DISEÑO DEL EXPERIMENTO : El experimento se diseñó a tres factores con dos niveles cada uno, con dos réplicas por combinación de tratamientos, según la siguiente descripción:

FACTORES	NIVELES
A : TIPO DE CAUCHO.	a_1 : Caucho Natural SMR5. a_2 : Caucho Natural SMR20.
B :. TIPO DE ACELERANTE,	b_1 : Sulfenamida (Di-Benzotiazol Disulfuro). b_2 : Mercaptano (2-Mercapto-Benzotiazol).
C :. ACTIVADOR DEL ACELERANTE.	c_1 : Oxido de Zinc. c_2 : Acido esteárico.

RESPUESTA : el *delta torque*, expresado en Newton Metro [Nm]. El delta torque es la diferencia entre el torque mínimo y el torque máximo. El torque mínimo se mide cuando la goma comienza a vulcanizar y el torque máximo, cuando el compuesto alcanza la máxima vulcanización. Se mide con un equipo llamado *rehómetro*, el cual, a través de un rotor, le aplica un torque al compuesto a una temperatura fija, en este caso 191 °C.

Cada corrida experimental dura 60 minutos, aproximadamente, y se efectuó una por día.

LIMITACIONES : Pueden haber factores no deseados, que influyan sobre la respuesta. Estos son:

1) Alguna posible falla del equipo mezclador al momento de realizarse el experimento.

2) Variaciones debido a la procedencia de alguno de los componentes. Por ejemplo, un caucho natural SMR5 puede ser de Indonesia, Malasia o Venezuela y los tres tienen comportamientos distintos, debido a los factores climáticos de los países. Por lo tanto, el experimento se hizo con componentes de una misma procedencia. También los acelerantes y catalizadores fueron del mismo proveedor.

RESULTADOS : Se corrió el experimento, dando las siguientes respuestas, promediadas a través de las dos réplicas. Los resultados son los siguientes:

COMBINACION DE TRATAMIENTOS	RESPUESTA
$a_1b_1c_1$	10.1
$a_2b_1c_1$	14.3
$a_1b_2c_1$	10.8
$a_2b_2c_1$	15.6
$a_1b_1c_2$	11.8
$a_2b_1c_2$	15.1
$a_1b_2c_2$	15.1
$a_2b_2c_2$	17.7

El siguiente es el diagrama de efectos, que muestra una importante influencia del factor A, tipo de caucho, y una influencia más moderada de los dos factores restantes, tipo del acelerante y activador del acelerante. Las interacciones son muy poco importantes.

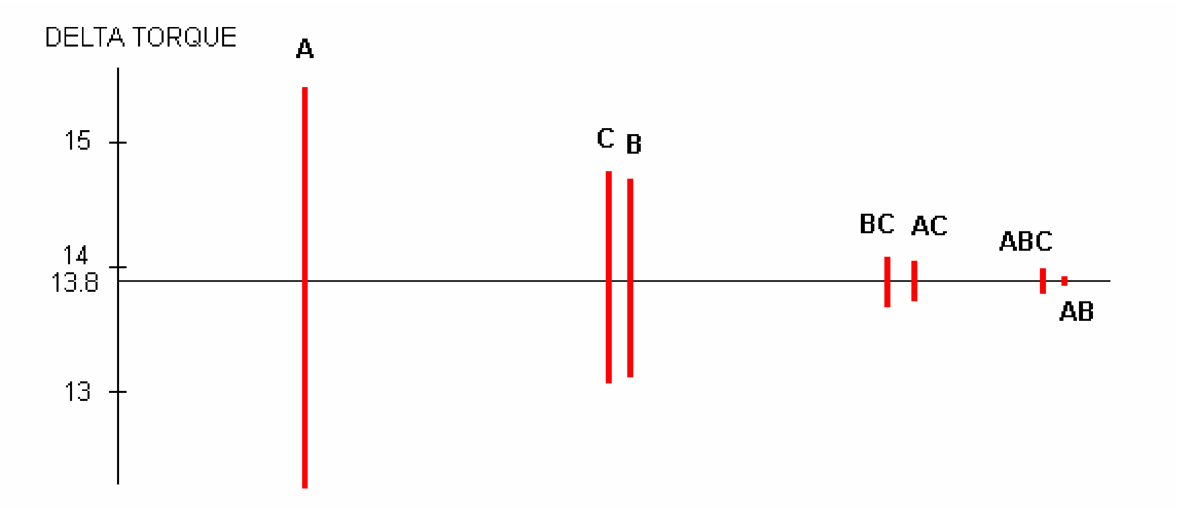


Figura 3.6 - Diagrama de efectos del experimento Optimización de la Plasticidad del Caucho de Neumático

Los gráficos de interacción, que se presentan a continuación, muestran los efectos de los tres factores, por las pendientes de las rectas, sobre todo el del factor A. El paralelismo de las rectas del gráfico de AB indica que esta interacción es nula. los otros pares de rectas, cuyas pendientes son similares, muestran un grado menor de interacción BC y AC.

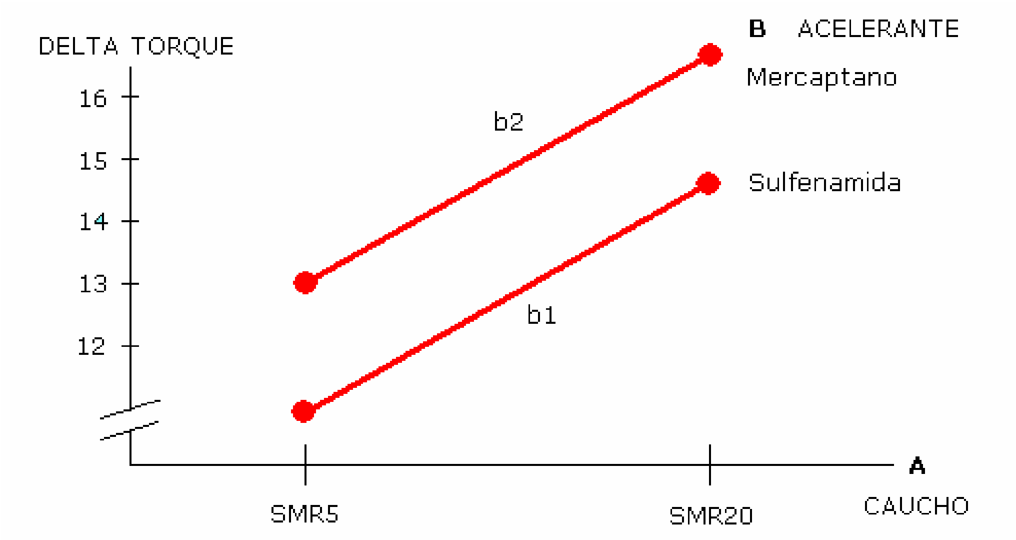


Figura 3.7 - Gráfico de interacción Delta Torque versus Tipo de Caucho, estratificado por Tipo de Ascelerante

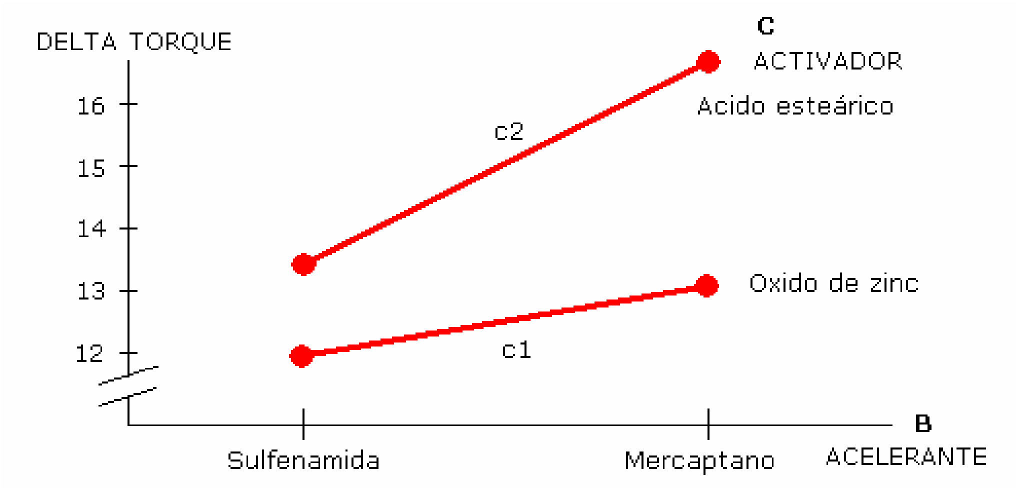


Figura 3.8 - Gráfico de interacción Delta Torque versus Tipo de Ascelerante, estratificado por Tipo de Caucho

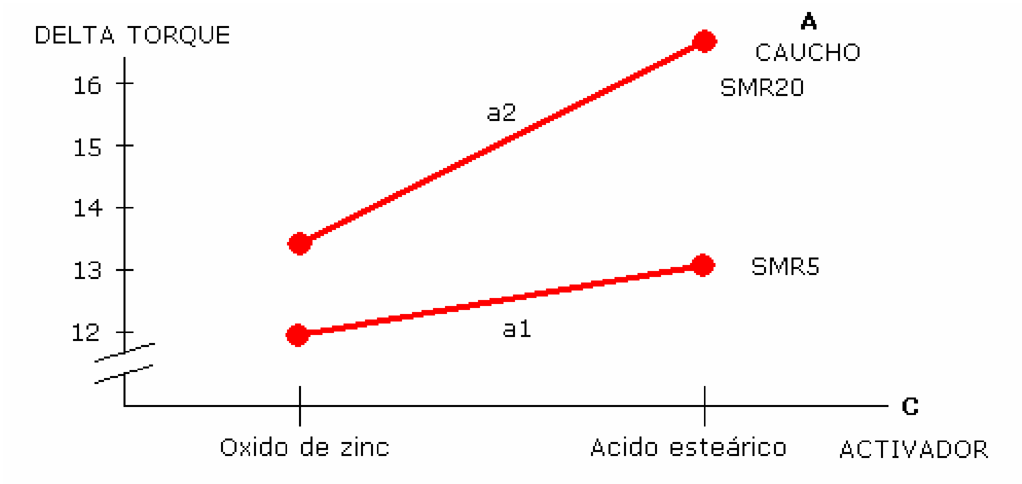


Figura 3.9 - Gráfico de interacción Delta Torque versus Activador del Acelerante, estratificado por Tipo de Caucho

□

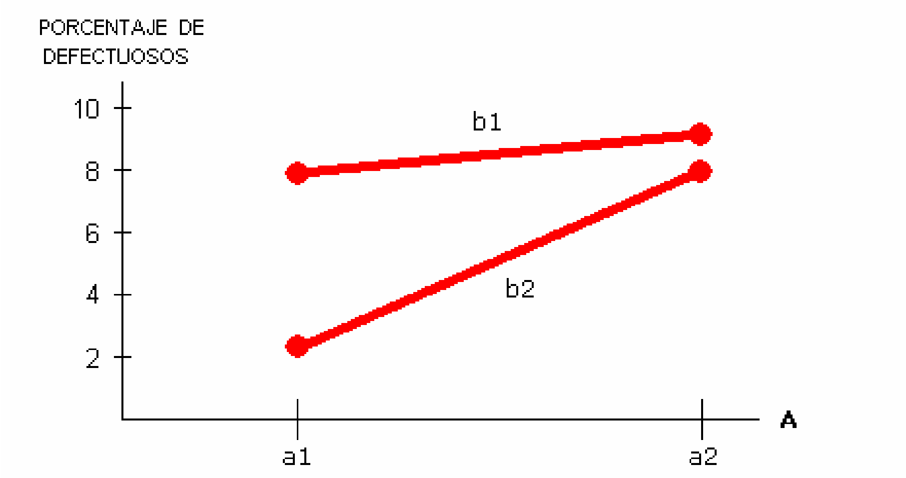
EJERCICIOS

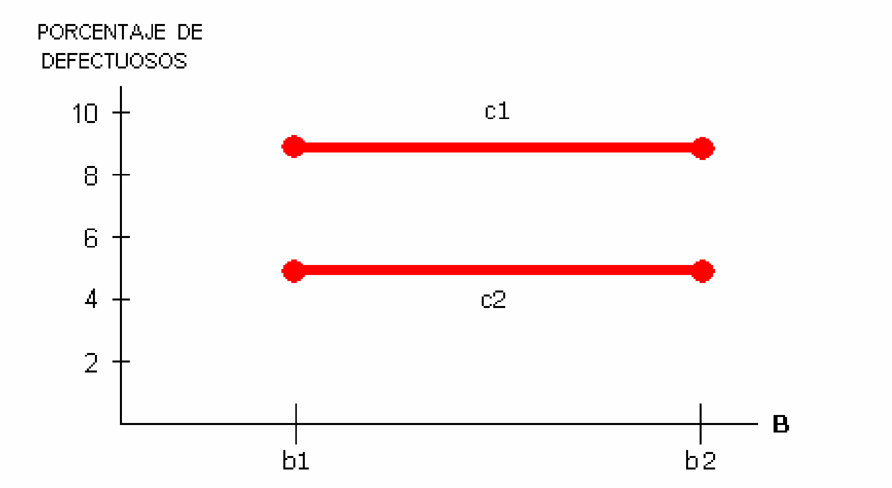
3.1) Se corrió un experimento con tres factores, a dos niveles cada uno. Los factores, con sus respectivos niveles, son:

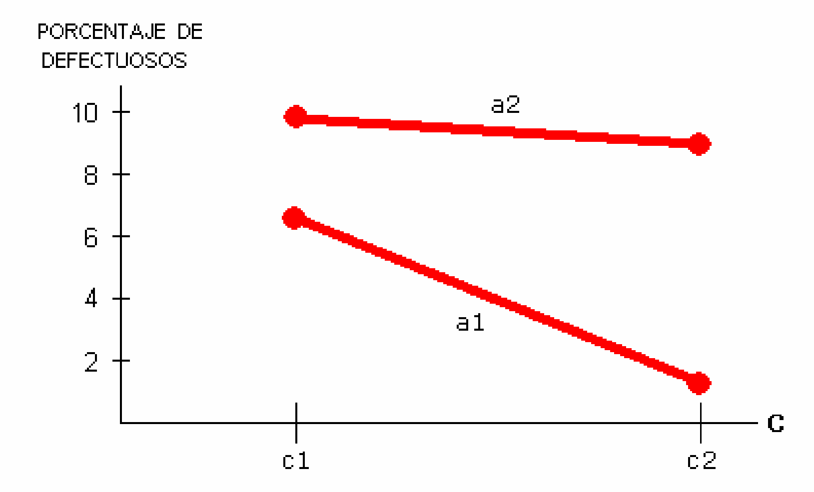
FACTOR	NIVELES
A : MAQUINA	a_1 : Maquina antigua.
	a_2 : Maquina nueva.
B : METODO OPERATIVO	b_1 : Standard.
	b_2 : Modificado.
C : MATERIAL	c_1 : Baja granulosidad.
	c_2 : Granulosidad media.

RESPUESTA: Porcentaje de ítemes producidos fuera de especificaciones.

De las respuestas obtenidas, se hicieron los tres gráficos de interacción que se muestran a continuación:

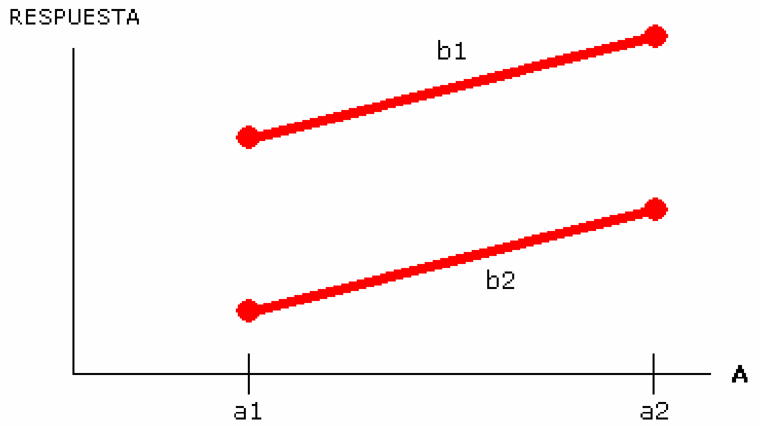


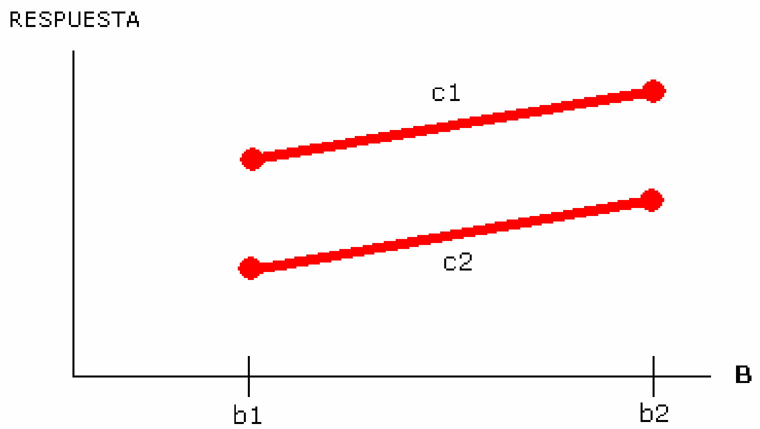


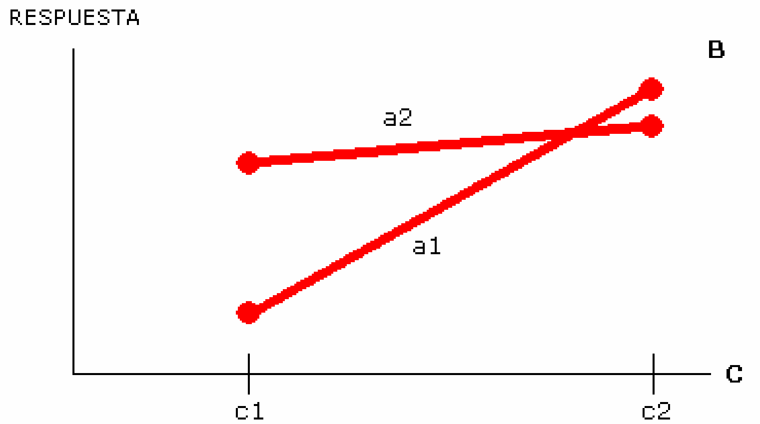


Interprete los resultados, en terminos de si hay o no, efectos principales de A, de B o de C, y si hay o no, interacciones dobles AB, AC y BC.

3.2) Se diseña un experimento para controlar la elasticidad de una lámina metálica utilizada en termostatos. Los factores son tres, con dos niveles cada uno. El primero corresponde a la aleación, el segundo al grosor de la lámina y el tercero al templado. Designaremos los factores por A, B y C, y sus niveles respectivos son a , a , b , b , c , y c .Los siguientes son los gráficos de interacción:







Interprete los gráficos, en el sentido de si hay o no efectos principales de A, de B o de C, y si hay o no interacciones dobles AB, AC o BC.

3.3) Un dispositivo para colocar sellos plásticos en cilindros de oxígeno consiste en una pieza de material aislante, de forma cilíndrica, abierta por debajo, con una resistencia eléctrica enrollada en su interior. Se diseña un experimento para estudiar el efecto de la forma y tipo de la pieza de aislante y la posición de la resistencia, sobre el tiempo que toma el sello en alcanzar la temperatura necesaria para contraerse. Los factores son tres, a dos niveles cada uno:

FACTOR	NIVELES
A : TIPO DE MATERIAL AISLANTE	a_1 : Alta densidad.
	a_2 : Baja densidad.
B : DIÁMETRO DE LA PIEZA AISLANTE	b_1 : 15 cm.
	b_2 : 20 cm.
C : POSICIÓN DE LA RESISTENCIA	c_1 : Al fondo del cilindro.
	c_2 : En mitad del cilindro.

RESPUESTA: Tiempo de calentado, del sello, en segundos. Los resultados de llevar a cabo el experimento son los siguientes:

COMBINACION DE TRATAMIENTOS	RESPUESTA
$a_1b_1c_1$	6
$a_2b_1c_1$	8
$a_1b_2c_1$	7
$a_2b_2c_1$	9
$a_1b_1c_2$	7
$a_2b_1c_2$	9
$a_1b_2c_2$	11
$a_2b_2c_2$	13

a)Construya los siguientes tres gráficos de interacción:

i) Respuesta versus A, estratificado por B (promediado a través de los niveles de C).
ii) Respuesta versus B, estratificado por C (promediado a través de los niveles de A).
iii) Respuesta versus C, estratificado por A (promediado a través de los niveles de B).

b) Interprete los gráficos, en el sentido de si hay efectos principales de A, B, o C, y si hay interacciones dobles AB, BC, o AC.

3.4) En una planta química se produce ácido nítrico, por oxidación de amoníaco. Se desea minimizar el porcentaje de amoníaco que no se oxida, y que se pierde. Los factores a controlar son tres: A, flujo de aire; B, temperatura del refrigerante; C, concentración del compuesto. Se diseñó el experimento a dos niveles por cada factor. Construya la tabla de respuestas, el diagrama de efectos y dibuje los gráficos de interacción. Interprete los resultados obtenidos. Las respuestas del experimento, en porcentajes x10, están dadas en la tabla siguiente:

COMBINACION DE TRATAMIENTOS	RESPUESTA
$a_1b_1c_1$	38
$a_2b_1c_1$	37
$a_1b_2c_1$	29
$a_2b_2c_1$	30
$a_1b_1c_2$	35
$a_2b_1c_2$	34
$a_1b_2c_2$	24
$a_2b_2c_2$	25

3.5) El proceso de producción de cal comienza con la introducción de carbonato de calcio a un horno rotatorio de velocidad variable, en cuyo extremo de salida hay un quemador que produce una temperatura de alrededor de 1200 ºC en la zona de calcinación.

Se hizo un experimento para medir el efecto de tres variables de operaci¢n, sobre la calidad del producto. Los factores son tres, a dos niveles cada uno:

<u>FACTOR</u> <u>NIVELES</u>

A.- TAMAÑO DE LA CARGA. a_1 : Granulometría de 1/4 a 3/4 plg.
a_2 : Granulometr¡a de 3/4 a 1 1/2 plg.

B.- VELOCIDAD DE GIRO. b_1 : Bajo 1.5 R.P.M.
b_2 : Sobre 1.5 R.P.M.

C.- CALOR. c_1 : Bajo 1200 ºC.
c_1 : Sobre 1200 ºC.

<u>RESPUESTA</u>: Ley de la cal libre que presenta reactividad para los procesos, medida en porcentaje de ley.

La tabla siguiente entrega los resultados del experimento, realizado con dos réplicas:

COMBINACION DE TRATAMIENTOS	RESPUESTA REPLICA 1	REPLICA 2
$a_1b_1c_1$	84	92
$a_2b_1c_1$	87	91
$a_1b_2c_1$	92	90
$a_2b_2c_1$	98	86
$a_1b_1c_2$	96	90
$a_2b_1c_2$	97	99
$a_1b_2c_2$	94	94
$a_2b_2c_2$	96	98

Construya la tabla de respuestas, el diagrama de efectos y dibuje los gráficos de interacción. Interprete los resultados obtenidos.

3.6) En las planta de producción de ácido sulfúrico se utilizan catalizadores en los convertidores que permiten la transformación de trióxido de azufre (SO_3) a dióxido de azufre (SO_4), como una etapa dentro del proceso de producción. Una parte del SO_3 no se transforma y es lanzado a la atmósfera. Se desea probar el efecto de dos tipos de catalizadores, del tiempo de utilizacion de éstos, y de los niveles de alimentación de ácido sobre el porcentaje de emisión de SO a la atmósfera, que se busca minimizar.

Se diseña un experimento con tres factores, a dos niveles cada uno, como se describe a continuación:

FACTORES NIVELES

A : CATALIZADOR a_1 : tipo 1
a_2 : tipo 2

B. : TIEMPO DE OPERACIÓN b_1 : 1 mes
b_2 : 12 meses

C. : NIVEL DE ALIMENTACIÓN c_1 : nivel 1
c_2 : nivel 2

RESPUESTA: Factor de emisión de SO_3 a la atmósfera, en partes por cada 100000, medida con instrumentos en línea.

Se corrió el experimento, dando por resultado los siguientes valores:

COMBINACION DE TRATAMIENTOS	RESPUESTA
$a_1b_1c_1$	100
$a_2b_1c_1$	116
$a_1b_2c_1$	125
$a_2b_2c_1$	178
$a_1b_1c_2$	100
$a_2b_1c_2$	138
$a_1b_2c_2$	157
$a_2b_2c_2$	148

Construya la Tabla de Respuestas, el Diagrama de Efectos, y los Gráficos de Interacción. Dé una interpretación del Diagrama de Efectos y de los Gráficos de Interacción, en términos de los elementos dados en el planteo del problema. Compare lo mostrado por ambos.

CAPITULO 4

DISEÑOS FACTORIALES FRACCIONADOS

Se vio que el número de combinaciones de tratamientos para llevar a cabo un experimento factorial de k factores a dos niveles cada uno, es 2^k. Así, si k = 2, se requieren 2^2 = 4 combinaciones de tratamientos; si k = 3, 2^k aumenta a 8, después a 16, a 32, a 64, y a 128 si hay 7 factores. No es un número muy inusual el de 7 factores. Sin embargo, disponer de 128 combinaciones de tratamientos es sumamente costoso.

Afortunadamente, es posible realizar el experimento con menos combinaciones de tratamientos que las indicadas arriba. En tal caso se habla de un diseño factorial fraccionado. El precio que se paga por este ahorro es el hecho que algunos contrastes miden no un solo efecto (efecto principal o interacción), sino más de uno a la vez, siendo imposible obtener información individual sobre la influencia que cada uno de ellos tiene, separadamente, sobre la respuesta. En tal caso se dice que esos efectos están confundidos.

Al planear un experimento en forma fraccionada, se debe tratar de que cada nivel de los factores aparezca el mismo número de veces en el total de combinaciones de tratamientos, de modo que se puedan medir sus efectos con igual precisión. En tal caso se dice que el diseño está balanceado. Nos remitiremos a este tipo de situaciones. Para lograrlo, se debe dividir el total de combinaciones de tratamientos por una potencia de dos, y utilizar una de esas fracciones para el experimento. Las fracciones se denominan bloques.

Por ejemplo, un experimento 2^3 puede dividirse en 2, lo que nos da dos bloques de $2^3/2=2^2=4$ combinaciones de tratamientos; o puede dividirse en cuatro bloques de $2^{3-2}=2$ combinaciones de tratamientos.

En general, para lograr un experimento fraccionado de un experimento factorial 2^k , que esté balanceado, se debe escoger un bloque que sea una fracción de 1/p del total de combinaciones de tratamientos (con p<k). Este hecho no garantiza que esté balanceado. Se debe tener cuidado, además, que los niveles de todos los efectos aparezcan el mismo número de veces. Se usa el símbolo 2^{k-p} para designar un experimento fraccionado a $1/2^p$

Los siguientes ejemplos muestran posibles fraccionamientos balanceados de experimentos 2 y 2^2 y 2^3 .

EJEMPLO 4.1. La siguiente figura muestra el diseño 2^2 fraccionado en dos bloques parciales de dos combinaciones de tratamientos.

BLOQUE I	BLOQUE II
a_1b_1	a_2b_1
a_2b_2	a_1b_2

Tabla 4.1 - Distribución de los dos Bloques en un Diseño Balanceado 2^{2-1}

EJEMPLO 4.2. La siguiente figura muestra el diseño 2^3 fraccionado en dos bloques de cuatro combinaciones de tratamientos.

BLOQUE I	BLOQUE II
$a_1b_1c_1$	$a_2b_1c_1$
$a_2b_2c_1$	$a_1b_2c_1$
$a_2b_1c_2$	$a_1b_1c_2$
$a_1b_2c_2$	$a_2b_2c_2$

Tabla 4.2 - Distribución de los dos Bloques en un Diseño Balanceado 2^{3-1}

EJEMPLO 4.3. La siguiente figura muestra el diseño 2^3 fraccionado en cuatro bloques de dos combinaciones de tratamientos.

BLOQUE I	BLOQUE II	BLOQUE III	BLOQUE IV
$a_1b_1c_1$	$a_2b_1c_1$	$a_1b_2c_2$	$a_1b_1c_2$
$a_2b_2c_2$	$a_1b_2c_2$	$a_2b_1c_2$	$a_2b_2c_1$

Tabla 4.3 - Distribución de los cuatro Bloques en un Diseño Balanceado 2^{3-2}

ESTUDIO DE CASO : PRECISION DEL RESULTADO DEL ANALISIS QUIMICO PARA MEDIR EL CONTENIDO DE ORO EN CONCENTRADO DE COBRE.

La metalurgia es la ciencia que estudia la forma de extraer los metales de las menas, y los prepara para una posterior utilización. En el caso del cobre, éste se encuentra en la naturaleza en los minerales, formados por especies mineralógicas valiosas de cobre, mezcladas con grandes cantidades de materiales de deshecho o ganga.

Una vez extraído el mineral de la mina, el primer paso consiste en separar físicamente las especies mineralógicas de cobre de la ganga, triturando y moliendo los minerales; el segundo paso consiste en concentrar las especies valiosas por flotación por espuma. Estas operaciones no modifican las características químicas de las especies que han sido separadas y concentradas. El producto obtenido en esta etapa se denomina *concentrado de minerales* o *concentrado de cobre*.

La etapa siguiente es la eliminación de las impurezas obtenidas en la flotación junto al cobre. La primera consiste en un proceso pirometalúrgico realizado en hornos a altas temperaturas, dando origen a un *ánodo de cobre,* de ley aproximadamente 99,5%. A continuación este ánodo es tratado electroquímicamente, dando como producto el denominado *cátodo de cobre*, de ley aproximadamente 99,98%, el cual es comercializado mayoritariamente en los mercados de Europa y Estados Unidos.

Los productos obtenidos en las distintas etapas mencionadas, requieren de un control operacional. Es así como adquiere una real importancia el departamento de control de calidad, a través de sus distintas áreas (laboratorio químico, laboratorio físico, muestreras, control de pesaje). Junto a este control se destaca también el control a los productos, llamado control de certificación.

El análisis químico de oro en concentrados de cobre, se lleva a cabo a través de dos técnicas combinadas: Extracción orgánica por solventes y espectrofotometría de absorción atómica. El siguiente diagrama muestra en detalle el procedimiento analítico:

Muestreo.
Tratamiento de la muestra.
Separación de la solución de oro del material insoluble.
Decantación en embudo de decantación
Separación del oro en fase orgánica de fase inorgánica.
Registro de datos del instrumental.
Evaluación.

Los resultados del análisis presentan una alta variabilidad, por lo que se sospecha que el método de análisis influye sobre éste, lo que redunda en valores poco confiables.

Se hizo un estudio, enmarcado dentro de estos procesos de control, que corresponde al análisis químico de oro contenido en concentrados de cobre, para observar la variabilidad de los resultados. Los factores que potencialmente influyen sobre el resultado son:

Tamaño de la muestra.
Temperatura de reacción.
Tiempo de reacción.
Volumen extraído.
Acidez del medio.
Capacidad del extractante.
Forma de calibrar el instrumento de medición.

Con el objeto de estudiar la influencia de estos factores sobre el resultado del análisis, se tomo una muestra homogeneizada de concentrado de cobre, la que se dividió en porciones, para utilizar en cada corrida experimental.

OBJETIVO DEL EXPERIMENTO : Diseñar un experimento para controlar las fuentes de variación mas relevantes, en la determinación de oro en concentrados de cobre.

DISEÑO DEL EXPERIMENTO : Siete factores, con dos niveles cada uno, según la siguiente descripción:

FACTORES	NIVELES
A : TAMAÑO DE LA MUESTRA.	a_1 : Partícula fina. a_2 : Partícula gruesa.
B : TEMPERATURA DE REACCIÓN.	b_1 : Baja. b_2 : Alta.
C : TIEMPO DE REACCIÓN.	c_1 : 2 horas 30 minutos. c_2 : 3 horas 30 minutos.
D :. VOLUMEN EXTRAÍDO	d_1 : 10 ml. d_2 : 12 ml.
E :. ACIDEZ DEL MEDIO	e_1 : 20% de HCl e_2 : 15% de Hcl
F :. CAPACIDAD DEL EXTRACTANTE	f_1 : Alta extracción. f_2 : Baja extracción.
G :. FORMA DE CALIBRAR EL INSTRUMENTO DE MEDICIÓN.	g_1 : Estándar alto en concentración de oro. g_2 : Estándar bajo en concentración de oro.

RESPUESTA: Concentración de oro en gramos por tonelada.

Dado que el experimento completo requeriría el excesivo número de $2^7 = 128$ corridas experimentales, se decidió fraccionarlo a 1/16, es decir, un diseño 2^{7-4}, y correr dos bloques distintos, de 8 combinaciones de tratamiento cada una. Al ser distintos los bloques, se pudo contrastar los resultados, para ver si hay evidencia de pérdida de información por efectos confundidos. Los bloques que se corrieron son los siguientes:

BLOQUE I	BLOQUE II
$a_1b_1c_1d_1e_1f_1g_1$	$a_1b_1c_1d_1e_1f_1g_1$
$a_1b_1c_1d_2e_2f_2g_2$	$a_1b_1c_2d_1e_2f_2g_1$
$a_1b_2c_2d_1e_1f_2g_2$	$a_2b_2c_1d_1e_2f_2g_1$
$a_1b_2c_2d_2e_2f_1g_1$	$a_2b_2c_2d_1e_1f_1g_1$
$a_2b_1c_2d_1e_2f_1g_2$	$a_1b_2c_1d_1e_1f_2g_2$
$a_2b_1c_2d_2e_1f_2g_1$	$a_1b_2c_2d_1e_2f_1g_2$
$a_2b_2c_1d_1e_2f_2g_1$	$a_2b_1c_1d_1e_2f_1g_2$
$a_2b_2c_1d_2e_1f_1g_2$	$a_2b_1c_2d_1e_1f_2g_2$

□

4.1.- Efectos Confundidos. Observemos la matriz de diseño del experimento 2^3 , que se muestra a continuación, pero esta vez con las combinaciones de tratamientos agrupadas en dos bloques, según el diseño 2^{3-1} del ejemplo 5.

		CONTRASTES							
	COMPONENTE	1	A	B	AB	C	AC	BC	ABC
BLOQUE I	$a_1b_1c_1$	+	-	-	+	-	+	+	-
	$a_2b_2c_1$	+	+	+	+	-	-	-	-
	$a_2b_1c_2$	+	+	-	-	+	+	-	-
	$a_1b_2c_2$	+	-	+	-	+	-	+	-
BLOQUE II	$a_2b_1c_1$	+	+	-	-	-	-	+	+
	$a_1b_2c_1$	+	-	+	-	-	+	-	+
	$a_1b_1c_2$	+	-	-	+	+	-	-	+
	$a_2b_2c_2$	+	+	+	+	+	+	+	+

Tabla 4.4 - Matriz de Diseño del Experimento 2^{3-1}

Si nos fijamos en un solo bloque cualquiera, veremos que es lo mismo probar el efecto A que el efecto de la interacción BC. Por lo tanto, al querer medir uno de estos efectos, estaremos midiendo ambos a la vez. Se dice que los efectos A y BC están confundidos. También vemos que están confundidos B con AC, C con AB y ABC con 1.

Hay una forma simple de determinar cuáles grupos de efectos están confundidos entre sí, sin tener que construir la matriz de diseño completa. Consiste en identificar el o los efectos que aparezcan confundidos con la identidad 1, dentro de cada bloque (y por lo tanto, están confundidos con los bloques).

El símbolo de cada uno de éstos se "multiplica" por los símbolos correspondientes a cada uno de los demás efectos, respetando la convención de que una letra elevada al cuadrado es igual a 1. Entonces el efecto que se multiplica por él está confundido con el efecto resultado de la "multiplicación".

En el ejemplo con el diseño 2^{3-1} , visto más arriba, vimos en la Matriz de Diseño del Bloque I, que sólo ABC está confundido con 1, pues si se mide ABC dentro de ese bloque , es lo mismo que medir la identidad (sólo aparecen cambiados los signos, pero eso no altera la situación); lo mismo ocurre en el Bloque II . Si multiplicamos ABC por cada uno de los efectos, obtenemos los siguientes resultados:

$ABC \times 1 = ABC$
$ABC \times A = A^2BC = BC$
$ABC \times B = AB^2C = AC$
$ABC \times AB = A^2B^2C = C$
$ABC \times C = ABC^2 = AB$
$ABC \times AC = A^2BC^2 = B$
$ABC \times BC = AB^2C^2 = A$
$ABC \times ABC = A^2B^2C^2 = 1$

En resumen, podemos concluir que:

1 está confundido con ABC
A está confundido con BC
B está confundido con AC
C está confundido con AB

<u>EJEMPLO 4.3</u> (Continuación). Veamos qué pasa con el experimento 2^{3-2}, del ejemplo 4.3, según la distribución en bloques mostrada más arriba. La matriz de diseño, agrupando las combinaciones de tratamientos en los á bloques, es la que se presenta a continuación:

		CONTRASTES							
	COMPONENTE	1	A	B	AB	C	AC	BC	ABC
BLOQUE I	$a_1b_1c_1$	+	-	-	+	-	+	+	-
	$a_2b_2c_2$	+	+	+	+	+	+	+	+
BLOQUE II	$a_2b_1c_1$	+	+	-	-	-	-	+	+
	$a_1b_2c_2$	+	-	+	-	+	-	+	-
BLOQUE III	$a_1b_2c_1$	+	-	+	-	-	+	-	+
	$a_2b_1c_2$	+	+	-	-	+	+	-	-
BLOQUE IV	$a_1b_1c_2$	+	-	-	+	+	-	-	+
	$a_2b_2c_1$	+	+	+	+	-	-	-	-

Tabla 4.5 - Matriz de Diseño del Experimento 2^{3-2}

Aquí vemos que AB, AC y BC aparecen confundidos con la identidad 1. Entonces debemos multiplicar cada uno de ellos por todos los efectos, como se muestra seguidamente:

MULTIPLICACION POR AB	MULTIPLICACION POR AC	MULTIPLICACION POR BC
AB X 1 = AB	AC x 1 = AC	BC x 1 = BC
AB X A = B	AC x A = C	BC x A = ABC
AB X B = A	AC x B = ABC	BC x B = C
AB X AB = 1	AC x AB = BC	BC x AB= AC
AB X C = ABC	AC x C = A	BC x C = B
AB X AC = BC	AC x AC = 1	BC x AC = AB
AB X BC = AC	AC x BC = AB	BC x BC = 1
AB X ABC = C	AC x ABC = B	BC x ABC = A

Tabla 4.6 - Cálculo de Efectos Confundidos en el Diseño 2^{3-1}

Observando todas las igualdades, de las cuales hay varias repetidas, nos encontramos con que hay dos grupos de efectos confundidos, que son

AC, AB, BC y 1
A, B, C y ABC

Este no es un buen diseño, pues todos los efectos principales están confundidos entre ellos, de modo que sería imposible cuantificar cuánta influencia tiene cada uno sobre la respuesta.

Generalizando los resultados obtenidos, podemos decir que en un experimento 2^{k-p} hay 2^{k-p} grupos de efectos confundidos, y cada grupo tiene 2^p efectos. En experimentos con más de tres factores, dado un número de bloques, hay más de una forma de definir bloques balanceados, por lo que se puede tener más de una estructura de confundidos.

Generalmente se prefiere aquellas estructuras en que no aparezcan confundidos los efectos principales, sino que éstos estén confundidos con interacciones de orden superior. Los resultados obtenidos son buenos bajo el supuesto de que los efectos de las interacciones son poco significativos, frente a los efectos principales. Este supuesto, con frecuencia es válido, puesto que en situaciones reales es normal que los efectos de más bajo orden tiendan a ser más significativos que los de orden más alto, aunque no siempre es así.

Para el análisis de los experimentos 2^{k-p} se usan los Diagramas de Efectos, en la misma forma que para los experimentos 2^k . Veamos un ejemplo de un diseño 2^{3-1} , en que sólo se usó el que llamamos Bloque I, más arriba, y que contiene las combinaciones de tratamientos $a_1b_1c_1$,. $a_2b_2c_1$, $a_2b_1c_2$ y $a_1b_2c_2$.

EJEMPLO 4.2 (Continuación). Supongamos que los valores de las respuestas coinciden con los del experimento completo, que dimos anteriormente, en el Ejemplo 3.1, es decir, $a_1b_1c_1 = 49$,. $a_2b_2c_1 = 48$, $a_2b_1c_2 = 23$ y $a_1b_2c_2 = 66$.

Recordemos que la Tabla de Respuestas del experimento completo es la siguiente

COMPO-NENTE	1	A		B		AB		C		AC		BC		ABC	
$a_1b_1c_1$	49	49		49			49	49			49		49	49	
$a_2b_1c_1$	43		43	43		43		43		43			43		43
$a_1b_2c_1$	69	69			69	69		69			69	69			69
$a_2b_2c_1$	67		67		67		67	67		67		67		67	
$a_1b_1c_2$	46	46		46			46		46	46		46			46
$a_2b_1c_2$	23		23	23		23			23		23	23		23	
$a_1b_2c_2$	66	66			66	66			66	66			66	66	
$a_2b_2c_2$	61		61		61		61		61		61		61		61
TOTAL	424	230	194	161	263	201	223	228	196	222	202	205	219	205	219
VERIF.			424		424		424		424		424		424		424
FACTOR	1	-1	1	-1	1	-1	1	-1	1	-1	1	-1	1	-1	1
NETO	424		36		102		22		32		20		14		14
DIVISOR	8		4		4		4		4		4		4		4
EFECTO	53.0		9.0		25.5		5.5		8.0		5.0		3.5		3.5
RANGO			2		1		4		3		5		6		6

Tabla 4.7 - Tabla de Respuestas del Experimento 2^3

La Tabla de Respuestas para las combinaciones de tratamientos del Bloque I es la siguiente:

COMPO-NENTE	1	A		B		AB		C		AC		BC		ABC	
$a_1b_1c_1$	49	49		49			49	49			49		49	49	
$a_2b_2c_1$	67		67		67		67	67		67		67		67	
$a_2b_1c_2$	23		23	23		23			23		23	23		23	
$a_1b_2c_2$	66	66			66	66			66	66			66	66	
TOTAL	205	115	90	72	133	89	116	116	89	133	72	90	115	205	0
VERIF.			205		205		205		205		205		205		205
FACTOR	1	-1	1	-1	1	-1	1	-1	1	-1	1	-1	1	-1	1
NETO	205		25		61		27		27		61		25		205
DIVISOR	4		2		2		2		2		2		2		4
EFECTO	51.3		12.5		30.5		13.5		13.5		30.5		12.5		51.3
RANGO			6		2		4		4		2		6		1

Tabla 4.8 - Tabla de Respuestas del Experimento 2^3 , Bloque I.

Podemos observar algunos resultados interesantes: Primero, que los efectos principales coinciden con sus respectivos confundidos (aparte del signo). En segundo lugar, las estimaciones de los efectos A, B y C no son muy buenas, si se comparan con los valores que habíamos obtenido del experimento completo: 12.5 , 30.5 y 13.5, respectivamente, comparados con los valores dados por el experimento completo. Los valores eran 9.0 , 25.5 y 8.0, respectivamente. La razón es que las interacciones BC (confundida con A) y AB (confundida con C) son muy grandes. Otro aspecto que podemos notar, es que la estimación del efecto de la interacción triple no se puede hacer. Está confundido con la identidad, (y por lo tanto sus promedios coinciden).

Si hubiésemos realizado el experimento en el Bloque II, nos hubiéramos encontrado con la Tabla de Respuestas dada a continuación:

COMPO-NENTE	1	A		B		AB		C		AC		BC		ABC	
$a_2b_1c_1$	43		43	43		43		43		43			43		43
$a_1b_2c_1$	69	69			69	69		69			69	69			69
$a_1b_1c_2$	46	46		46			46		46	46		46			46
$a_2b_2c_2$	61		61		61		61		61		61		61		61
TOTAL	219	104	115	89	130	107	112	112	107	130	89	115	104		219
VERIF.			219		219		219		219		219		219		219
FACTOR	1	-1	1	-1	1	-1	1	-1	1	-1	1	-1	1	-1	1
NETO	219		11		41		5		5		5		41		219
DIVISOR	4		2		2		2		2		2		2		4
EFECTO	54.8		5.5		20.5		2.5		2.5		20.5		5.5		4.8
RANGO			3		1		6		6		1		3		5

Tabla 4.9 - Tabla de Respuestas del Experimento 2^{3-1} , Bloque II.

Nuevamente vemos que los efectos de A, B y C están muy lejos, tanto de los valores dados por el experimento completo, como por el experimento fraccionado realizado en el Bloque I: los nuevos valores son 5.5, 20.5 y 2.5, respectivamente.

EJEMPLO 4.4. Mostramos una situación similar a la anterior, con el mismo tipo de fraccionamiento, pero en que las respuestas dieron otros valores distintos. En primer lugar se muestra la Tabla de Respuestas del experimento completo 2^3 .

COMPO-NENTE	1	A		B		AB		C		AC		BC		ABC	
$a_1b_1c_1$	24	24		24			24	24			24		24	24	
$a_2b_1c_1$	42		42	42		42		42		42			42		42
$a_1b_2c_1$	47	47			47	47		47			47	47			47
$a_2b_2c_1$	75		75		75		75	75		75		75		75	
$a_1b_1c_2$	58	58		58			58		58	58		58			58
$a_2b_1c_2$	80		80	80		80			80		80	80		80	
$a_1b_2c_2$	86	86			86	86			86	86			86	86	
$a_2b_2c_2$	103		103		103		103		103		103		103		103
TOTAL	515	215	300	204	311	255	260	188	327	261	254	260	255	265	250
VERIF.			515		515		515		515		515		515		515
FACTOR	1	-1	1	-1	1	-1	1	-1	1	-1	1	-1	1	-1	1
NETO	515		85		107		5		139		7		5		15
DIVISOR	8		4		4		4		4		4		4		4
EFECTO	64.4		21.3		26.8		1.3		34.8		1.8		1.3		3.8
RANGO			3		2		6		1		5		6		4

Tabla 4.10. - Tabla de Respuestas del Experimento 2^{3-1}

Se puede ver que las interacciones no parecen significativas, frente a los efectos principales. Como consecuencia de esto, al efectuar el experimento en forma fraccionada, como 2^{3-1} , en cualquiera de los dos bloques, las estimaciones de los efectos principales son muy parecidas a las obtenidas con el experimento completo.

Además, en ambos bloques, los efectos aparecen con los mismos rangos. Esto se puede apreciar en las dos Tablas de Respuestas que se muestran más abajo, correspondientes al experimento fraccionado, efectuado separadamente en cada uno de los dos bloques.

COMPO-NENTE	1	A		B		AB		C		AC		BC		ABC	
$a_1b_1c_1$	24	24		24			24	24			24		24	24	
$a_2b_2c_1$	75		75		75		75	75		75		75		75	
$a_2b_1c_2$	80		80	80		80			80		80	80		80	
$a_1b_2c_2$	86	86			86	86			86	86			86	86	
TOTAL	265	110	155	104	161	166	99	99	166	161	104	155	110	265	0
VERIF.			265		265		265		265		265		265		265
FACTOR	1	-1	1	-1	1	-1	1	-1	1	-1	1	-1	1	-1	1
NETO	265		45		57		67		67		57		45		265
DIVISOR	4		2		2		2		2		2		2		4
EFECTO	66.3		22.5		28.5		33.5		33.5		28.5		22.5		66.3
RANGO			6		4		2		2		4		6		1

Tabla 4.11 - Tabla de Respuestas del Experimento 2^{3-1} , Bloque I.

COMPO-NENTE	1	A		B		AB		C		AC		BC		ABC	
$a_2b_1c_1$	42		42	42		42		42		42			42		42
$a_1b_2c_1$	47	47			47	47		47			47	47			47
$a_1b_1c_2$	58	58		58			58		58	58		58			58
$a_2b_2c_2$	103		103		103		103		103		103		103		103
TOTAL	250	105	145	100	150	89	161	89	161	100	150	105	145	0	250
VERIF.			250		250		250		250		250		250		250
FACTOR	1	-1	1	-1	1	-1	1	-1	1	-1	1	-1	1	-1	1
NETO	250		40		50		72		72		50		40		250
DIVISOR	4		2		2		2		2		2		2		4
EFECTO	62.5		20.0		25.0		36.0		36.0		25.0		20.0		62.5
RANGO			6		4		2		2		4		6		1

Tabla 4.12 - Tabla de Respuestas del Experimento 2^{3-1} , Bloque II.

4.2.- Construcción de Bloques en Diseños 2^K . Para definir bloques, en un diseño factorial fraccionado, en que se tiene determinado el número de factores, k, el experimentador debe decidir previamente sobre dos elementos. Pero antes de introducir estos dos elementos, definiremos dos nuevos conceptos que son importantes para la comprensión del procedimiento:

Interacciones Generalizadas. Una interacción generalizada de dos o más efectos, es la que resulta de "multiplicar" esos efectos, como se mostró anteriormente. Por ejemplo, si los efectos son AB y ACD, en un diseño 2 , su interacción generalizada es el efecto AB x ACD = A BCD = BCD; La interacción generalizada de B y BC es C; etc.

Efectos Independientes. Un conjunto de efectos son independientes si ninguno de ellos es interacción generalizada de algunos de los restantes. Por ejemplo, el conjunto { A, AC, ABC } es un conjunto de efectos independientes, pues ninguno es interacción generalizada de los demás. Sin embargo { A, AC, ABC, C } no lo es, pues el producto de A por AC es C.

Dadas estas definiciones, enumeramos las decisiones que debe tomar el experimentador, para definir su estructura de diseño experimental fraccionado:

1) Debe decidir qué fracción del diseño completo va a utilizar, sea 1/2, 1/4, 1/8, etc. Es decir, va a utilizar un diseño 2^{k-p} y tiene que decidir cuál va a ser el valor de p. Esto dependerá de los recursos de que dispone. Mientras más económico deba ser el diseño, más pequeña la fracción, es decir, más grande el p, pero más restringida será la información que obtenga el investigador.

2) Debe decidir qué efectos independientes va a confundir con 1. Es decir, qué efectos está dispuesto a no poder cuantificar. Es deseable que no sean efectos principales, ni, en lo posible, interacciones dobles. Se prefiere confundir interacciones de alto orden, siguiendo la regla de que, en la práctica, mientras más alto es el orden de la interacción, probablemente su efecto sobre la respuesta será menos significativo.

Algunos resultados numéricos: En un diseño 2^{k-p}, hay k factores a 2 niveles cada uno. El número de combinaciones de tratamientos es 2^k , distribuidas en 2^p bloques de 2^{k-p} combinaciones de tratamientos en cada una. El número de efectos independientes que quedan confundidos con 1 es igual a p. Se forman 2^{k-p} grupos de 2^p efectos confundidos entre sí.

Por ejemplo, si la fracción de diseño es 1/2, son dos bloques, p=1, y por lo tanto es un efecto que se debe confundir con 1; hay grupos de efectos confundidos. Si la fracción es 1/4, son cuatro bloques, y son dos los efectos independientes a confundir con 1. Los grupos de confundidos constan de á efectos cada uno. Todo lo anterior se puede verificar en los ejemplos dados al principio del capítulo. Si la fracción es 1/8, ocho bloques, son tres los efectos independientes a confundir con 1, y los grupos de confundidos tienen ú efectos.

Una vez tomadas sus decisiones, el siguiente procedimiento le permitirá construir los bloques, que ya quedan totalmente determinados. Para mayor claridad, se presentará el procedimiento a través de un ejemplo:

EJEMPLO 4.5. Supóngase que se trata de un diseño 2^3 , y se va a fraccionar a 1/2, es decir, dos bloques de cuatro combinaciones de tratamientos cada uno. Entonces se debe definir un sólo efecto a confundir con 1. Supóngase que el experimentador decide confundir AB.

Se construye una ecuación definitoria, del tipo

$L = \alpha_1 x_1 + \alpha_2 x_2 + \alpha_3 x_3$

en que α_1 es igual a 1 si A está presente en el efecto a confundir, 0 si no lo está; α_2 es 1 si B está, 0 en caso contrario, y lo mismo para α_3 . Si se desea confundir ABC, $\alpha_1 = 1$, $\alpha_2 = 1$ y $\alpha_3 = 1$. En nuestro caso queremos confundir AB, luego $\alpha_1 = 1$, $\alpha_2 = 1$ y $\alpha_3 = 0$, y la ecuación definitoria es

$L = x_1 + x_2$

Los términos x_1 , x_2 y x_3 toman el valor del subíndice de a, b y c, respectivamente, de cada combinación de tratamientos: 1 si el factor está al nivel bajo, 2 si está al nivel alto, en cada una de las combinaciones de tratamientos del experimento completo.

Luego de calculado el valor de L, para cada combinación de tratamientos, se forma un bloque con todas aquellas para las cuáles L resultó ser un número par, y el otro bloque con todas aquellas para las que L resultó ser impar. La siguiente tabla muestra los cálculos que habría que hacer, en nuestro ejemplo:

COMBINACION DE TRATAMIENTOS	x_1	x_2	x_3	ECUACION DEFINITORIA $L = x_1 + x_2$	PARIDAD	BLOQUE
$a_1b_1c_1$	1	1	1	2	par	I
$a_2b_1c_1$	2	1	1	3	impar	II
$a_1b_2c_1$	1	2	1	3	impar	II
$a_2b_2c_1$	2	2	1	4	par	I
$a_1b_1c_2$	1	1	2	2	par	I
$a_2b_1c_2$	2	1	2	3	impar	II
$a_1b_2c_2$	1	2	2	3	impar	II
$a_2b_2c_2$	2	2	2	4	par	I

Tabla 4.13 - Construcción de bloques

Los bloques definidos en la última columna, quedan estructurados de la siguiente forma:

BLOQUE I	BLOQUE II
$a_1b_1c_1$	$a_2b_1c_1$
$a_2b_2c_1$	$a_1b_2c_1$
$a_1b_1c_2$	$a_2b_1c_2$
$a_2b_2c_2$	$a_1b_2c_2$

Si aplicamos la regla vista anteriormente, para determinar qué efectos están confundidos con cuáles otros, nos encontramos con lo siguiente:

$$
\begin{aligned}
&AB \times 1 = AB \\
&AB \times A = A^2B = B \\
&AB \times B = AB^2 = A \\
&AB \times AB = A^2B^2 = 1 \\
&AB \times C = ABC = ABC \\
&AB \times AC = A^2BC = BC \\
&AB \times BC = AB^2C = AC \\
&AB \times ABC = A^2B^2C = C
\end{aligned}
$$

Recordemos que ahora AB está confundido con 1, por eso se "multiplican" los efectos por AB. Podemos concluir que:

1 está confundido con AB, que era la condición bajo la cual se construyó el diseño.
A está confundido con B
C está confundido con ABC
AC está confundido con BC

Este no resultó ser un buen diseño, pues dos efectos principales, A y B, quedaron confundidos entre sí, y no se podrá saber si son significativos, por separado. A esto se referirá la siguiente sección.

Si p es 2 o más (fracciones de 1/4, 1/8, etc.), se tomarán tantas ecuaciones definierais como el valor de p. Las combinaciones de tratamientos cuya paridad coincide en todas sus ecuaciones definierais, van al mismo bloque.

Por ejemplo, si p=4, habrán 4 bloques, dos confundidos con 1, independientes, dos ecuaciones definitorias; las paridades posibles para los dos valores de L son (par,par), (par,impar), (impar,par) y (impar,impar). De esta forma quedan definidos los cuatro bloques.

4.3.- Resolución de un Diseño Factorial Fraccionado. Un diseño fraccionado es de resolución R si, dado cualquier par de efectos confundidos entre sí, el número total de factores contenidos en ellos es a lo menos R.

En el Ejemplo 8 se vio un diseño 2^{3-1} , en el que están confundidos 1 con AB, A con B, BC con AC y C con ABC; el número total de factores en cada par de confundidos es 2, 2, 4, y 4, respectivamente. Luego la resolución es II. Este diseño se expresa en símbolos como 2_{II}^{3-1}

En el ejemplo 6 se muestra un diseño 2^{3-1}, los confundidos son 1 con ABC, A con BC, B con AC y C con AB, 3 factores en cada caso. Luego la resolución es III. Este es un diseño 2_{III}^{3-1} .

También se mostró un diseño 2^{3-2} , en el Ejemplo 5, y se vio que los confundidos son AC con AB con BC con 1, y A con B con C con ABC. Por lo tanto la resolución es II, y el diseño es un 2_{II}^{3-2} .

Mientras más alta es la resolución, mejor es el diseño. Esto es porque es deseable evitar confundir afectos de bajo orden con otros de bajo orden, como serían efectos principales entre sí. Es mejor confundir efectos de bajo orden con otros de orden alto, pues en general éstos últimos suelen tener poca significación, en la práctica, como fuentes de variación de la respuesta.

A continuación se enumeran las características de los diseños con resoluciones III, IV y V:

Resolución III. No hay efectos principales confundidos entre sí, pero si efectos principales con interacciones dobles.

Resolución IV. No hay efectos principales confundidos entre sí, ni efectos principales con interacciones dobles. Si hay interacciones dobles confundidas entre sí.

Resolución V. No hay efectos principales ni interacciones dobles confundidos entre ellos. Si hay interacciones dobles confundidas con triples.

Existen programas computacionales que, dadas las condiciones mencionadas en la sección anterior, entregan el diseño óptimo, es decir, el de más alta resolución. El uso de estos programas, evita tener que efectuar los cálculos para la construcción de bloques, que puede ser bastante tediosa en diseños con muchos factores.

EJERCICIOS

4.1) La empresa CHILE-OLIVES desea mejorar la hermeticidad de los envases, con capacidad para 200 litros, de aceitunas de exportación. El siguiente diseño corresponde a un experimento a tres factores: El sello, el adhesivo y la temperatura de sellado. El sello es de dos tipos posibles, el adhesivo se aplica en baja densidad y en alta densidad, y la temperatura de sellados tiene dos niveles, 50 grados y 65 grados centígrados. Por razones de economía, el experimento se hace fraccionado en cuatro bloques. Se trata, entonces de un diseño 2^3, que se muestra a continuación:

BLOQUE I	BLOQUE II	BLOQUE III	BLOQUE IV
$a_1b_1c_1$ $a_2b_1c_1$	$a_1b_2c_1$ $a_1b_1c_2$	$a_2b_2c_1$ $a_2b_2c_2$	$a_2b_1c_2$ $a_1b_2c_2$

a) Encuentre los efectos confundidos con bloques, y los grupos de efectos confundidos entre sí.
b) ¿Cuál es la resolución del diseño ?

4.2) Se busca optimizar la resistencia a la compresión del hormigón denominado tipo H-30, en función de los siguientes factores, a dos niveles cada uno:

FACTORES	NIVELES
A: RAZÓN AGUA-CEMENTO.	a_1 : 0.45 a_2 : 0.60
B: TIEMPO DE CURADO.	b_1 : 7 días. b_2 : 28 días
C.- ADITIVO PLASTIMENT-HER.	c_1 : 0.5 % c_2 : 1.5 %

La respuesta es la resistencia a la compresión, medida en Kg/cm. El diseño del experimento es en un bloque de dos combinaciones de tratamientos. El siguiente diagrama muestra la forma de fraccionar el experimento en bloques de dos:

	EFECTOS E INTERACCIONES							
	1	A	B	AB	C	AC	BC	ABC
BLOQUE I	+	-	+	-	-	+	-	+
	+	+	-	-	+	+	-	-
BLOQUE II	+	-	-	+	-	+	+	-
	+	+	+	+	+	+	+	+
BLOQUE III	+	+	+	+	-	-	-	-
	+	-	+	-	+	-	+	-
BLOQUE IV	+	+	-	-	-	-	+	+
	+	-	-	+	+	-	-	+

a) Encuentre los efectos confundidos con bloques, y los grupos de efectos confundidos entre sí.
b) ¿Cuál es la resolución del diseño ?

4.3) Repita lo del ejercicio 4.2, para el siguiente caso:

	EFECTOS E INTERACCIONES							
	1	A	B	AB	C	AC	BC	ABC
BLOQUE I	+	-	-	+	-	+	+	-
	+	+	+	+	-	-	-	-
BLOQUE II	+	+	-	-	-	-	+	+
	+	-	+	-	-	+	-	+
BLOQUE III	+	-	-	+	+	-	-	+
	+	+	+	+	+	+	+	+
BLOQUE IV	+	+	-	-	+	+	-	-
	+	-	+	-	+	-	+	-

4.4) En el mismo problema de optimizar la hermeticidad de sus envases de 200 litros, supóngase que CHILE-OLIVES dispone de mayores recursos para su estudio, y el experimento lo fracciona sólo en dos bloques. Se trata de un diseño 2^{3-1} . A continuación se da la distribución de las combinaciones de tratamientos, en cada uno de los bloques. Se dan, además, los valores de las respuestas obtenidas, después de realizado el experimento:

	COMBINACION DE TRATAMIENTOS	RESPUESTA
BLOQUE I	$a_1b_1c_1$	38
	$a_2b_2c_1$	30
	$a_1b_1c_2$	35
	$a_2b_2c_2$	25
BLOQUE II	$a_2b_1c_1$	37
	$a_1b_2c_1$	29
	$a_2b_1c_2$	34
	$a_1b_2c_2$	24

a) Calcule los efectos de los tratamientos en cada bloque, mediante tablas de respuestas.

b) Encuentre los efectos confundidos con bloques, y los grupos de efectos confundidos entre sí. Observando las tablas de respuestas, determine si hay consistencia con los resultados obtenidos en a).

c) ¿Cuál es la resolución del diseño ?

4.5) Repita lo del ejercicio 4.4, para los siguientes datos:

	COMBINACION DE TRATAMIENTOS	RESPUESTA
BLOQUE I	$a_1b_1c_1$	16
	$a_1b_2c_1$	22
	$a_2b_1c_2$	32
	$a_2b_2c_2$	35
BLOQUE II	$a_2b_1c_1$	18
	$a_2b_2c_1$	24
	$a_1b_1c_2$	26
	$a_1b_2c_2$	29

4.6) Repita lo del ejercicio 4.4, para los siguientes datos:

	EFECTOS E INTERACCIONES								
	1	A	B	AB	C	AC	BC	ABC	RESPUESTA
BLOQUE I	+	+	-	-	-	-	+	+	325
	+	-	+	-	-	+	-	+	226
	+	+	-	-	+	+	-	-	451
	+	-	+	-	+	-	+	-	227
BLOQUE II	+	-	-	+	-	+	+	-	358
	+	+	+	+	-	-	-	-	295
	+	-	-	+	+	-	-	+	441
	+	+	+	+	+	+	+	+	396

4.7) Repita lo del ejercicio 4.4, para los siguientes datos:

	EFECTOS E INTERACCIONES								
	1	A	B	AB	C	AC	BC	ABC	RESPUESTA
BLOQUE I	+	+	-	-	-	-	+	+	16
	+	-	+	-	+	-	+	-	18
	+	+	+	+	-	-	-	-	19
	+	-	-	+	+	-	-	+	19
BLOQUE II	+	-	-	+	-	+	+	-	18
	+	+	-	-	+	+	-	-	16
	+	-	+	-	-	+	-	+	19
	+	+	+	+	+	+	+	+	19

4.8) Se requiere efectuar un experimento con tres factores, a dos niveles cada uno, relacionado con la maniobrabilidad de un vehículo, en diversas condiciones del camino. Los factores y sus respectivos niveles son:

FACTOR	NIVELES
A : TIPO DE SUPERFICIE.	a_1 : Concreto. a_2 : Asfalto.
B : CONDICION DEL CAMINO	b_1 : Seco. b_2 : Mojado
C : PRESION DE LOS NEUMATICOS	c_1 : 2ú psi. c_2 : 30 psi.

La respuesta es la distancia recorrida al aplicar los frenos, cuando el vehículo se desplaza a 50 km. por hora.

Se hace un diseño 2^{3-1} , es decir, sólo se corre un bloque de cuatro combinaciones de tratamientos. La siguiente es la matriz del diseño, y en ella se indican los dos bloques en que se decide fraccionar el experimento, de los cuáles el experimentados seleccionar uno para ejecutar:

	COMBINACIÓN DE TRATAMIENTOS	EFECTOS E INTERACCIONES							
		1	A	B	AB	C	AC	BC	ABC
BLOQUE I	$a_1b_1c_1$	+	-	-	+	-	+	+	-
	$a_2b_1c_1$	+	+	-	-	-	-	+	+
	$a_1b_2c_2$	+	-	+	-	+	-	+	-
	$a_2b_2c_2$	+	+	+	+	+	+	+	+
BLOQUE II	$a_1b_2c_1$	+	-	+	-	-	-	-	+
	$a_2b_2c_1$	+	+	+	+	-	-	-	-
	$a_1b_1c_2$	+	-	-	+	+	+	-	+
	$a_2b_1c_2$	+	+	-	-	+	+	-	-

a) ¿Qué efecto o efectos están confundidos con los bloques?
b) Forme todos los grupos de efectos que están confundidos entre sí.

c) ¿Cuál es la resolución del diseño? ¿Es ésta la partición más conveniente del diseño factorial 2^3 , en dos bloques?

4.9) Se desea efectuar un experimento para determinar los factores que afectan el desgaste de un motor para portones automáticos. Los factores considerados son tres: Peso del portón (factor A), tipo de superficie de deslizamiento (factor B), y distancia de desplazamiento (factor C). A cada factor se le definen dos niveles.

Debido a lo caro que resultaría la experimentación para realizar las 8 corridas experimentales mínimas necesarias para efectuar el experimento completo, se decide correr sólo un bloque de cuatro combinaciones de tratamientos. Se piensa que la interacción triple ABC es poco importante, por lo que se decide confundirla con bloques.

a) Diseñe los bloques de tal modo que se confundan con ABC.
b) Indique los grupos de efectos confundidos entre sí.
c) Cuál es la resolución del experimento ?

4.10) Repita lo del ejercicio 4.9, pero confundiendo la interacción doble AB con bloques.

4.11) Repita lo del ejercicio 4.10, pero confundiendo el efecto principal A con bloques. ¿Por qué no sería conveniente este diseño ?

4.12) Supóngase la misma situación del ejercicio 4.8, pero ahora el presupuesto para efectuar estudios es aún más escuálido, y sólo se correrá un bloque de dos combinaciones de tratamientos.

a) Diseñe los bloques de tal modo que se confundan con AB y con ABC.
b)Indique los grupos de efectos confundidos entre sí.
c) ¿Cuál es la resolución del experimento ?

4.13) Repita lo del ejercicio 4.12, pero confundiendo las interacciones dobles BC y AC con bloques.

4.14) Repita lo del ejercicio 4.12, pero confundiendo la interacción doble BC y el efecto principal A con bloques.

CAPITULO 5

DISEÑOS FACTORIALES CON MAS DE DOS NIVELES

En una etapa exploratoria, el fijar dos niveles por factor puede ser conveniente, por economía de recursos y de tiempo. Sin embargo, un análisis confirmatorio posterior puede requerir que algunos factores tengan más de dos niveles. Esto puede ser por las características propias del fenómeno que se está estudiando, por ser necesario estudiar con más precisión la forma que tiene la respuesta (análisis de superficies de respuesta), o por alguna otra razón, sugerida por el conocimiento empírico que se tiene del fenómeno. De esta forma, surgen diseños experimentales que se designan simbólicamente por 3^2 , 3x5x6, 5^4 , 2^3x3^2 , etc.

La situación aquí es bastante más compleja, y según sea el caso, el tratamiento que se hace es distinto. Por ejemplo, si un factor tiene un número primo de niveles, es decir, el número es divisible sólo por 1 y por sí mismo, la metodología a usar es diferente que si el número de niveles no es primo. También el número de expresiones o contrastes asignada a un efecto no es uno, como en el caso de dos niveles. Si hay tres niveles, se requieren dos contrastes para medir el efecto de un factor. La interacción de dos factores a tres niveles cada uno, se representa por 4 contrastes. En general, un efecto se mide por un número de contrastes igual al producto de los números de niveles de los factores que intervienen en el efecto, cada uno disminuido en uno. El número se denomina *grados de libertad* del efecto. Es una medida de la cantidad de información que se requiere para medir el efecto. Si es un efecto principal, interviene sólo un factor, y el número de grados de libertad es igual al número de niveles menos uno. Si es una interacción doble, el número de grados de libertad es igual al producto del número de niveles menos uno, de cada uno de los dos factores. Por ejemplo, en un diseño 3 , los efectos principales tienen 3 - 1 = 2 grados de libertad; las interacciones dobles tienen (3 - 1) x (3 - 1) = 4 grados de libertad.

ESTUDIO DE CASO : PERDIDA DE CALIBRACION DE LAMINAS BIMETALICAS, UTILIZADAS COMO ELEMENTO DE SEGURIDAD EN ARTEFACTOS A GAS.

Los artefactos de gas que tienen un piloto de alimentación de encendido, deben incluir, por norma, un elemento de seguridad. Este hace que, si por alguna razón se apaga la llama del piloto, se produzca un corte automático del paso de gas.

Existen dos sistemas de corte automático : El *termo-par* y la *lámina bimetálica*. En el primero, la llama del piloto calienta la cabeza de un filamento conductor, que al subir de temperatura, aumenta su presión interior, accionando una bobina que abre un sello en un conducto de paso de gas. La lamina bimetálica consta de dos láminas pegadas de metales distintos. Al aumentar la temperatura, una se dilata más que la otra, lo que produce que el par se curve, accionando un eje que abre el paso de gas. En ambos casos, al enfriarse ocurre lo inverso, se cierra el paso de gas.

Ambos sistemas deben cumplir con la norma, que especifica que el corte de gas debe producirse en un tiempo menor de 60 segundos, de apagarse la llama del piloto.

Estos dispositivos pierden su calibración, con el tiempo, y el artefacto no puede encenderse en forma normal. En el caso de la lámina bimetálica, ésta pierde sus propiedades mecánicas, ocasionando problemas de retraso en el tiempo de encendido, o simplemente dejando el artefacto sin encender.

Se diseñó un experimento para observar el comportamiento del sistema de seguridad tipo lámina bimetálica, con el objeto de prolongar la vida útil de este elemento, y así reducir el número de llamadas solicitando servicio.

OBJETIVO DEL EXPERIMENTO : Medir el efecto de las dimensiones de los elementos constitutivos de la lámina bimetálica, sobre el tiempo de vida antes de perder la calibración.

DISEÑO DEL EXPERIMENTO : Dos factores, con tres niveles cada uno, con cinco réplicas, según la siguiente descripción:

	FACTORES	NIVELES
A :	DISTANCIA DEL EJE IMPULSOR A LA LAMINA BIMETALICA.	a_1 : 1 mm. a_2 : 2 mm. a_3 : 3 mm.
B :.	DISTANCIA DE LA CABEZA PILOTO A LA LAMINA BIMETALICA.	b_1 : 1 mm. b_2 : 2 mm. b_3 : 3 mm.

RESPUESTA : La respuesta es el número de horas de vida antes de perder la calibración. La pérdida de calibración se determina cuando el tiempo de corte de gas sube de 60 segundos después de apagado el piloto.

El experimento se realizó manteniendo los pilotos encendido durante varias semanas, verificando cada día su calibración, y registrando el momento en que se descalibraban.

□

5.1.- Diseños Factoriales 3^2 , con dos Factores a Tres Niveles. Como ilustración, veremos un ejemplo de un diseño a dos factores, A y B, cada uno con tres niveles. Las combinaciones de tratamientos son a_1b_1, a_2b_1, a_3b_1, a_1b_2, a_2b_2, a_3b_2, a_1b_3, a_2b_3 y a_3b_3.

El siguiente es un conjunto de contrastes ortogonales, que sirven para medir los efectos. Este conjunto constituye la Matriz de Diseño del experimento 3^2.

COMBINACION DE	EFE CTOS								
TRATAMIENTOS	1	A1	A2	B1	B2	AB1	AB2	AB3	AB4
a_1b_1	1	-1	1	-1	1	1	-1	-1	1
a_2b_1	1	0	-2	-1	1	0	0	2	-2
a_3b_1	1	1	1	-1	1	-1	1	-1	1
a_1b_2	1	-1	1	0	-2	0	2	0	-2
a_2b_2	1	0	-2	0	-2	0	0	0	4
a_3b_2	1	1	1	0	-2	0	-2	0	-2
a_1b_3	1	-1	1	1	1	-1	-1	1	1
a_2b_3	1	0	-2	1	1	0	0	-2	-2
a_3b_3	1	1	1	1	1	1	1	1	1

Tabla 5.1 - Matriz de Diseño para Analizar un Experimento 3^2

Observemos que, en cada uno, la suma de sus componentes es cero. Siguen válidas las definiciones dadas en el Capítulo 2 para contrastes y para contrastes ortogonales:

Un **contraste** es una suma algebraica de combinaciones de tratamientos tales que la suma de los coeficientes positivos es igual a la suma de los coeficientes negativos.

Dos contrastes son **ortogonales**, si el resultados de multiplicarlos es otro contraste.

En la Matriz de Diseño del experimento 3^2 , podemos ver que el primer contraste, llamado A1, sirve para comparar el efecto del nivel 1 con el efecto del nivel 3 del factor A. El segundo, A2, compara el efecto del nivel 2 con los efectos de los niveles 1 y 3 en promedio, del mismo factor. Por eso, los dos primeros contrastes miden el efecto del factor A. De forma similar, los dos siguientes, B1 y B2, miden el efecto del factor B. Los últimos cuatro, AB1 a AB4, comparan el efecto de las diferencias de niveles de un factor, a diferentes niveles del otro. Por eso decimos que los cuatro miden diversos aspectos de la interacción entre A y B.

También se pueden tratar los contrastes como si fueran expresiones algebraicas, y factorizarlas, como lo hicimos en el caso de dos niveles
.
Es así que el primer contraste se puede simbolizar como

$$A1 = (a_3 - a_1)(b_1 + b_2 + b_3)$$

y ahora se ve con más claridad que se trata de una comparación entre los efectos de los niveles 1 y 3 del factor A. También tenemos

$$A2 = (a_1 - 2a_2 + a_3)(b_1 + b_2 + b_3)$$

comparación entre a_1 y a_2 con a_3 combinados. Análogamente,

$$B1 = (a_1 + a_2 + a_3)(b_3 - b_1)$$

$$B2 = (a_1 + a_2 + a_3)(b_1 - 2b_2 + b_3)$$

Observemos que si sumamos A1 con A2, se forma una comparación entre los niveles a_2 y a_3. De forma análoga, los cuatro contrastes para la interacción se pueden escribir como

$$AB1 = (a_3 - a_1)(b_3 - b_1)$$

$$AB2 = (a_3 - a_1)(b_1 - 2b_2 + b_3)$$

$$AB3 = (a_1 - 2a_2 + a_3)(b_3 - b_1)$$

$$AB4 = (a_1 - 2a_2 + a_3)(b_1 - 2b_2 + b_3)$$

El lector puede verificar, con paciencia, que la suma de las cuatro expresiones da

$$AB1 + AB2 + AB3 + AB4 = 4(a_3 - a_2)(b_3 - b_2)$$

una diferencia entre las diferencias de los efectos de a_3 y a_2 de A, a los niveles b_3 y b_2 de B.

EJEMPLO 5.1.- Supongamos que las respuestas a las diferentes combinaciones de tratamientos, en el orden dado más arriba, a_1b_1 , a_2b_1, a_3b_1, a_1b_2, a_2b_2, a_3b_2, a_1b_3, a_2b_3 y a_3b_3 , son, respectivamente, 59, 27, 44, 53, 27, 29, 69, 35, 48. La siguiente es la Tabla de Respuestas para este experimento, construida en forma análoga al caso 2^3, y que nos permite conocer los efectos.

COMPO-NENTE	1	A1		A2		B1		B2	
a_1b_1	59	59		59		59		59	
a_2b_1	27				27	27		27	
a_3b_1	44		44	44		44		44	
a_1b_2	53	53		53					53
a_2b_2	27				27				27
a_3b_2	29		29	29					29
a_1b_3	69	69		69			69	69	
a_2b_3	35				35		35	35	
a_3b_3	48		48	48			48	48	
TOTAL	391	181	121	302	89	130	152	282	109
FACTOR	1	-1	1	1	-2	-1	1	1	-2
TOTAL PONDERADO	391	-181	121	302	-178	-130	152	282	-218
NETO	391		60		124		22		64
DIVISOR	9		3		6		3		6
EFECTO	43.4		20.0		20.7		7.3		10.7
RANGO			2		1		4		3

Tabla 5.2 - Tabla de Respuestas para el Diseño 3 . Primera parte.

COMPO-NENTE	1	AB 1		AB 2				AB 3				AB4		
a_1b_1	59	59		59				59				59		
a_2b_1	27								27				27	
a_3b_1	44		44		44			44				44		
a_1b_2	53					53							53	
a_2b_2	27													27
a_3b_2	29						29						29	
a_1b_3	69		69	69						69		69		
a_2b_3	35										35		35	
a_3b_3	48	48			48					48		48		
TOTAL	391	107	113	128	92	53	29	103	27	117	35	220	144	27
FACTOR	1	1	-1	-1	1	2	-2	-1	2	1	-2	1	-2	4
TOTAL PONDERADO	391	107	-113	-128	92	106	-58	-103	54	117	-70	220	-288	108
NETO	391		6				12				2			40
DIVISOR	9		2				4				4			8
EFECTO	43.4		3.0				3.0				0.5			5.0
RANGO			6				6				8			5

Tabla 5.3 - Tabla de Respuestas para el Diseño 3^2 . Segunda parte.

La fila rotulada *Factor*, contiene las componentes de los contrastes. La fila *Total Ponderado*, es el producto del *Total* respectivo de la columna, multiplicado por su Factor. El *Neto* es el valor absoluto de la suma algebraica de los Totales Ponderados de cada contraste. El *Divisor* es la suma de las componentes del contraste, que tienen signo positivo. El *Efecto* es el cuociente entre el Neto y el Divisor, respectivos. El *Rango* es el orden de magnitud de los Efectos, ordenados de mayor a menor.

Los efectos, ordenados por magnitud, se muestran en el Diagrama de Efectos, Figura 5.1
.

El efecto de A es el más notorio, tanto A1, la comparación entre los dos niveles extremos a_1 y a_3, y A2, la comparación entre el nivel medio a_2 y los otros dos. Sigue en importancia el contraste B2, que compara el nivel b_2 con los niveles b_1 y b_3 de este factor. Luego B1, que compara b_1 con b_3. Después sigue la componente AB4 de la interacción. Ya con menor significación, le siguen A1, A2, y más lejos, A3.

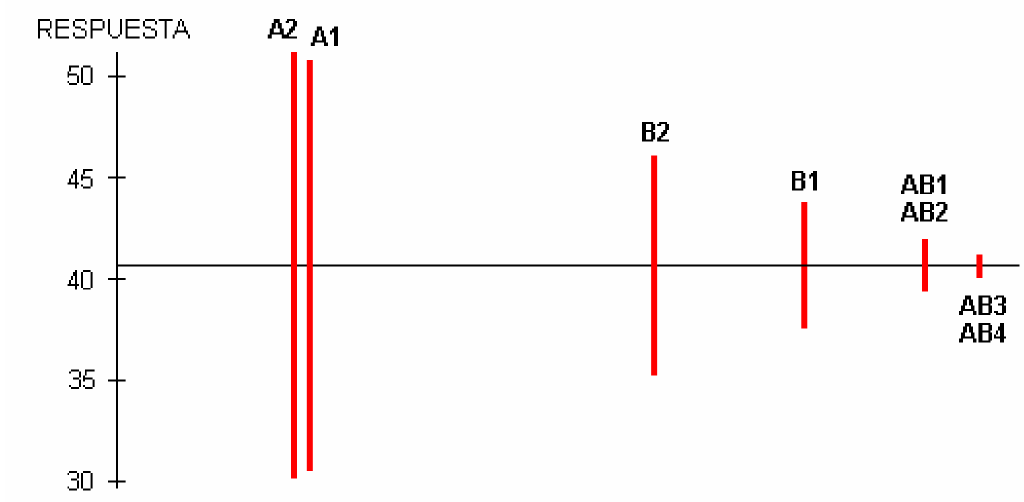


Figura 5.1 - Diagrama de Efectos para el Experimento Factorial 3^2.

También podemos construir Gráficos de Interacción, en este caso. Debemos tener presente que si los niveles corresponden a una variable nominal, el orden en que se ubican en el eje horizontal es arbitrario, y las distancias entre los puntos no tienen un sentido físico. En cambio, si los niveles de un factor son valores numéricos, deben ir en el orden natural. En este caso, si los gráficos de interacción muestran líneas rectas ascendentes, o descendentes, podemos interpretarlo como un efecto lineal: la respuesta al factor es de tipo lineal, o de primer grado. Si muestran líneas quebradas, con un cambio de pendiente, lo interpretamos como un efecto cuadrático: hay una respuesta cuadrática, o de segundo grado, del factor. Puede darse una superposición de ambos efectos, lineal y cuadrático, en una respuesta. Pero debe quedar muy claro que no tiene sentido hablar de efectos lineal o cuadrático, si el factor no es numérico; en este caso la forma de la respuesta depende del orden en que ubiquen los niveles en el gráfico.

A continuación se presentan los Gráficos de Interacción. En ellos se muestran los 9 puntos que corresponden a las respuestas a las 9 combinaciones de tratamientos, dados en la columna de la *Identidad* de la Tabla de Respuestas. Se observa la presencia de los efectos principales y la interacción. Además, si los niveles del factor A fuesen lineales, se apreciaría que hay un efecto lineal de descenso de la respuesta, a medida que aumenta A, superpuesto con un efecto cuadrático, de concavidad hacia la parte superior. El paralelismo de las rectas muestran que no hay interacción, o ésta es muy débil.

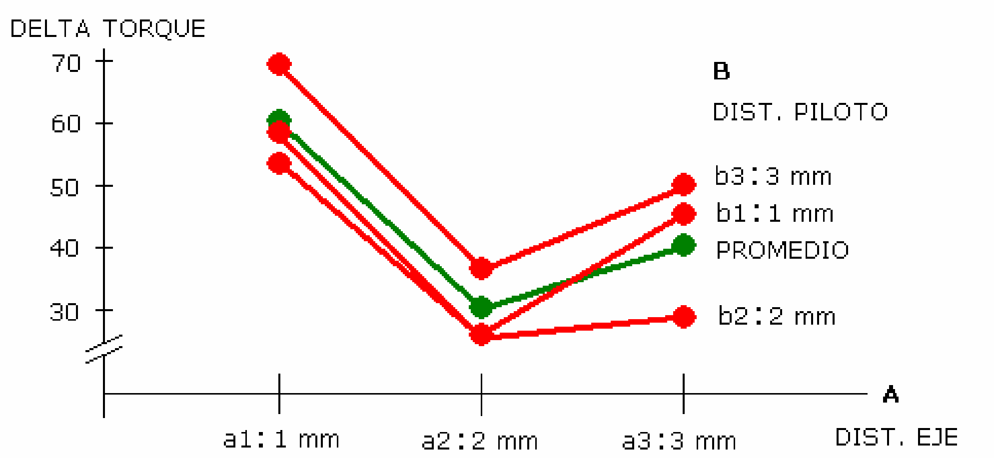


Figura 5.2 - Gráfico de Interacción del Experimento 3^2 , factor A en el eje de las absisas.

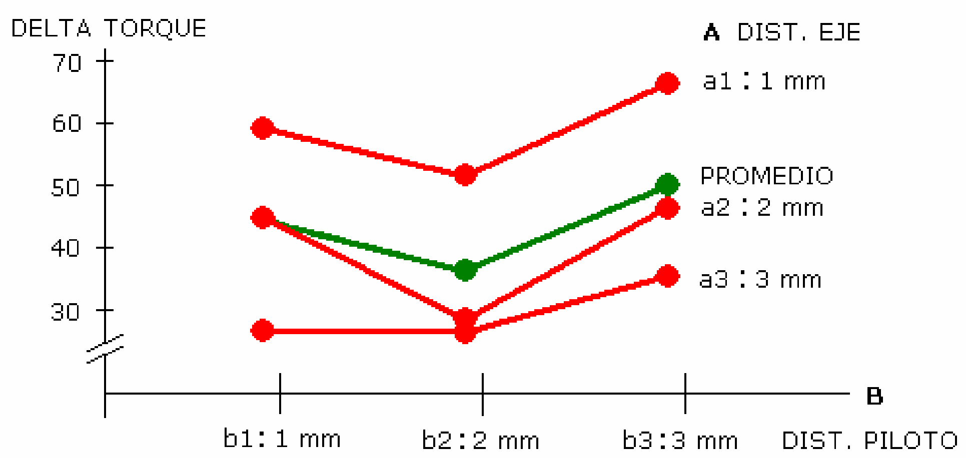


Figura 5.3 - Gráfico de Interacción del Experimento 3^2 , factor B en el eje de las absisas.

ESTUDIO DE CASO : RESISTENCIA A LA FLEXION EN LA FABRICACION DE LADRILLOS.

La fabrica de ladrillos El Nuevo Tiempo produce al mes una cantidad aproximada de 10.000 ladrillos de varios tipos. La producción de estos es de carácter industrial, con muy poca participación de la mano del hombre directamente. El cambio en la forma de producción permitió a la fabrica manejar una serie de variables dentro del proceso productivo, para obtener un producto estable en su comportamiento mecánico frente a los requerimientos de los clientes

Desde los yacimientos de arcilla El Libertador, ubicados a 15km. de las instalaciones industriales de la Fabrica El Nuevo Tiempo, se extrae la arcilla por medio de cargadores frontales del tipo CAT 998 que la depositan a camiones tolva de 30 TM de capacidad, para su traslado hasta la fábrica.

La arcilla transportada es depositada dentro de una tolva de 25 metros cúbicos, que alimenta un *chancador primario de cono* 48 x 64, que produce la fractura de la arcilla al tamaño especificado de media pulgada de diámetro.

Producida la fractura la arcilla, es transportada por medio de una cinta transportadora de 48plg. de ancho al *área de harneado*.

Dentro del área de harneado existen dos harneros de 8x10ps., que tienen instaladas mallas seleccionadoras de ½ plg. Producida la selección de la arcilla el *bajotamaño*, pasa a otra etapa, de preparación de la mezcla para el moldeo de los ladrillos.

El *sobretamaño* recircula por medio de una cinta transportadora de 36plg. al chancado primario, donde nuevamente es fracturada y devuelta al área de harneado.

La arcilla seleccionada es depositada dentro de las cuatro *piscinas de preparación*, que tienen una capacidad de 50.000 mts. cúbicos.

El transporte desde el área de harneado se hace por medio de una cinta transportadora de 24plg., que alimenta un "*stacker radial* " que alimenta indistintamente a cualquiera de las cuatro piscinas.

Dentro de las piscinas de preparación se le adiciona agua para producir la mezcla, o masa arcillosa, junto con aditivos determinados, según el tipo de ladrillo que se va a producir.

La masa arcillosa es retirada desde las piscinas de preparación por medio de cargadores frontales del tipo CAT 966, que la depositan en las *máquinas de moldeo* de los diferentes tipos de ladrillos.

Después de ser moldeada la arcilla, los ladrillos frescos son depositados en *una cinta de rodillos*, de 96plg., que hace que estos circulen por dentro del *horno de secado continuo*. La cinta de rodillos permite ajustar la velocidad, para determinar el tiempo de cocción de los ladrillos, dentro del horno de secado continuo.

Los ladrillos cocidos dentro del horno de secador continuo pasan finalmente al *patio de almacenamiento*, donde se enfrían en forma natural. Posteriormente, son entregados a los clientes.

Los clientes de la fabrica de ladrillos El Nuevo Tiempo le han solicitado la certificación al *esfuerzo de flexión* de los ladrillos tipo Fiscal, de 40x25x8cm. La carga sobre el ladrillo tipo Fiscal debe ser de 180kg. antes que el ladrillo sufra una deformación Esta cifra es producto de una fórmula de resistencia de materiales para el cálculo de la flexión.

Frente a este requerimiento de sus clientes, la fábrica decidió conducir un experimento, para determinar la forma de controlar la variabilidad en la resistencia de los ladrillos. Los Ingenieros de Proceso estiman que la resistencia al esfuerzo puede estar afectada por dos factores en el proceso de producción. Estos factores son la temperatura y el tiempo de cocimiento a que son sometidos.

<u>DISEÑO DEL EXPERIMENTO</u> : El diseño es a dos factores, con tres niveles cada uno. Se hicieron 9 réplicas por cada combinación de tratamientos, lo que dio 90 corridas experimentales.

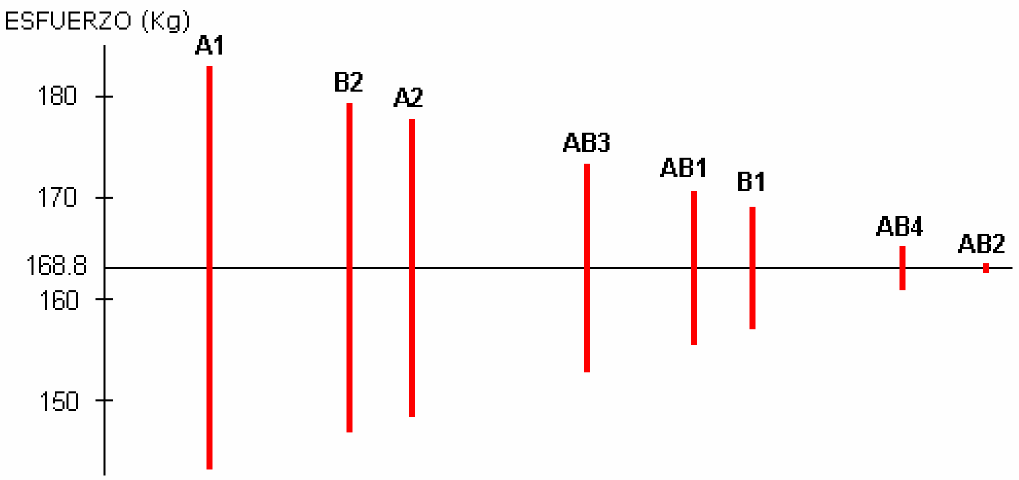
<u>FACTORES</u> <u>NIVELES</u>	
A : TEMPERATURA.	a_1 : 150 ºC. a_2 : 200 ºC. a_3 : 250 ºC.
B : TIEMPO DE COCIDO.	b_1 : 2 horas. b_2 : 2 1/2 horas. b_3 : 3 horas.

<u>RESPUESTA</u>: Se sometió a esfuerzos de flexión la muestra de ladrillos, y se midió la fuerza aplicada para alcanzar la deformación máxima permitida. La respuesta se mide en kilos.

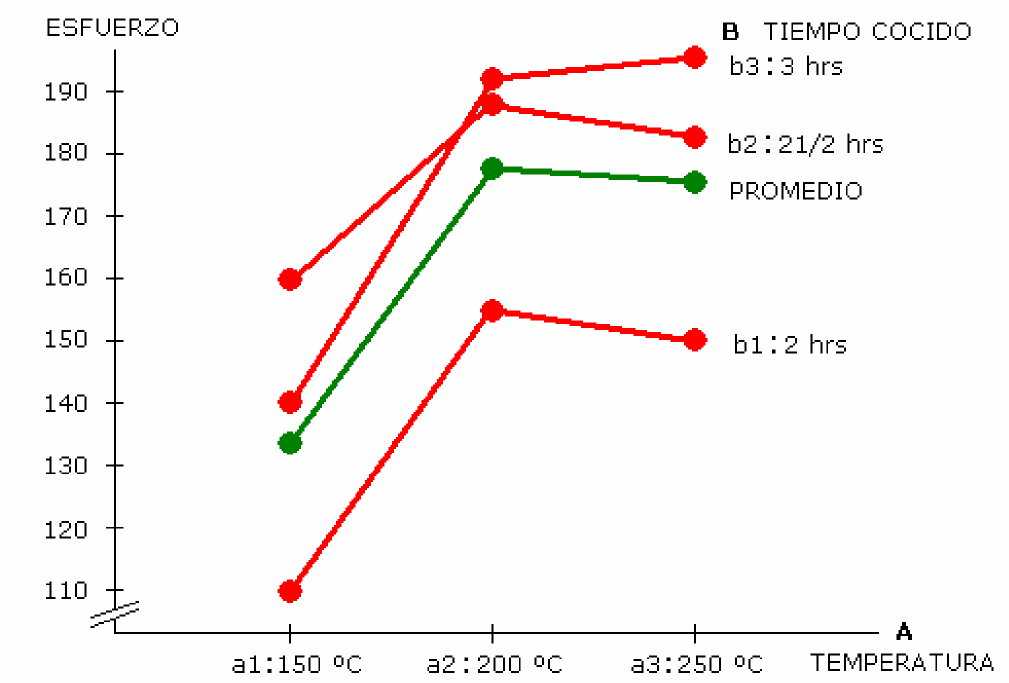
Los resultados obtenidos, promediados a través de las 9 réplicas, con valores aproximados al entero, fueron los siguientes:

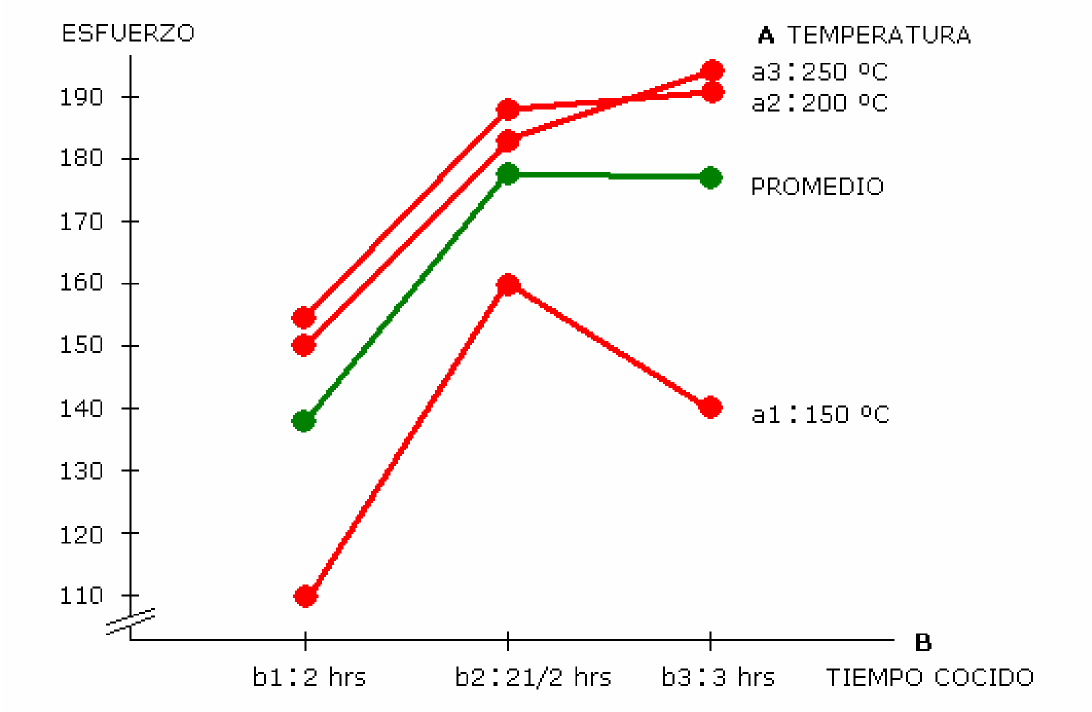
COMBINACION DE TRATAMIENTOS	RESPUESTA
a_1b_1	$Y_{11} = 110$
a_2b_1	$Y_{21} = 154$
a_3b_1	$Y_{31} = 150$
a_1b_2	$Y_{12} = 160$
a_2b_2	$Y_{22} = 190$
a_3b_2	$Y_{32} = 181$
a_1b_3	$Y_{13} = 140$
a_2b_3	$Y_{23} = 193$
a_3b_3	$Y_{33} = 196$

El diagrama de efectos se presenta a continuación. Muestra una componente cuadrática del factor TEMPERATURA y una componente cuadrática del factor TIEMPO. Las componentes lineales de ambos factores son muy débiles. Se observa también, aunque débil, una componente AB1 de interacción, esto es, lineal en ambas componentes.



Los gráficos de interacción, que se muestran a continuación, muestran lo mismo que el diagrama de efectos: Componentes cuadráticas importantes, bajo efecto lineal, sobre todo del factor TIEMPO. El paralelismo de las líneas indica poca interacción. En estos gráficos se aprecia que los valores óptimos están cerca del centro, para ambos factores, es decir, del punto TEMPERATURA = 200 ºC, TIEMPO = 2 1/2 horas.





□

5.2.- Diseños 3^2 fraccionados. Estudiaremos el caso 3^2, para ver cómo se fracciona un diseño con más de dos niveles por factor. Aquí se debe fraccionar en un múltiplo de 3, de modo que todas las fracciones tengan igual número de combinaciones de tratamientos, y los bloque puedan estar balanceados. Los diseños fraccionados resultantes son del tipo 3^{k-p} .

Para determinar los efectos confundidos, como en los casos de dos niveles, se debe observar la matriz de diseño para determinar qué efectos resultan confundidos con bloques, y qué efectos están confundidos entre sí. También funciona el método para construir bloques, visto anteriormente, de modo que se confundan efectos que uno ha determinado previamente, utilizando ecuaciones definitorias. En el caso de un diseño 3^p balanceado, el número de efectos independientes que quedan confundidos con bloques está dado por p. Multiplicando cada efecto principal e interacción, se determina cuáles efectos, o componentes de efectos, (como AB1, AB2, etc), resultan confundidos entre sí. Al multiplicar las componentes de efectos, se debe utilizar la misma regla de multiplicación de efectos, dada en el capítulo 2. Es decir, se multiplican los efectos, eliminando todo factor que aparezca elevado al cuadrado. Los resultados se muestran en la tabla siguiente:

	A1	A2	B1	B2	AB1	AB2	AB3	AB4
A1	1	A1	AB1	AB2	B1	B2	AB1	AB2
A2	A1	1	AB3	AB4	AB1	AB2	B1	B2
B1	AB1	AB3	1	B1	A1	AB1	A2	AB3
B2	AB2	AB4	B1	1	AB1	A1	AB3	A2
AB1	B1	AB1	A1	AB1	1	B1	A1	AB1
AB2	B2	AB2	AB1	A1	B1	1	AB1	A1
AB3	AB1	B1	A2	AB3	A1	AB1	1	B1
AB4	AB2	B2	AB3	A2	AB1	A1	B1	1

Tabla 5.4 - Tabla de Multiplición de efectos para el diseño 3^2.

EJEMPLO 5.2. Se desea comparar la degradación de tres marcas de aceite de alta calidad, en tres tipos de motores diferentes. Sea el factor A la marca de aceite, y el factor B el tipo de motor. La respuesta es una medida codificada de la degradación del aceite, después de 10 horas de funcionamiento continuado del motor, a un nivel de revoluciones fijo. Los valores observados de las respuestas son los siguientes:

COMPONENTE	RESPUESTA
a_1b_1	10
a_2b_1	15
a_3b_1	12
a_1b_2	21
a_2b_2	8
a_3b_2	19
a_1b_3	30
a_2b_3	16
a_3b_3	18

Tabla 5.5 - Unidades de Degradación de Aceite

Se desea fraccionar el experimento en tres bloques de tres combinaciones de tratamientos, de tal modo que se confunda el efecto principal A con bloques. Recordemos que este efecto tiene dos componentes, A1 y A2. Para determinar qué efectos quedan confundidos entre sí, multiplicamos estas dos componentes por cada una de las componentes del experimento, utilizando la tabla de multiplicar dada anteriormente.

Multiplicación por A1 :

A1 x 1	=	A1
A1 x A1	=	1
A1 x A2	=	A1
A1 x B1	=	AB1
A1 x B2	=	AB2
A1 x AB1	=	B1
A1 x AB2	=	B2
A1 x AB3	=	AB1
A1 x AB4	=	AB2

Multiplicación por A2:

A2 x 1	=	A2
A2 x A1	=	A1
A2 x A2	=	1
A2 x B1	=	AB3
A2 x B2	=	AB4
A2 x AB1	=	AB1
A2 x AB2	=	AB2
A2 x AB3	=	B1
A2 x AB4	=	B2

Observando los resultados, vemos que los grupos de confundidos son tres, a saber:

1, A1, A2 B1, AB1, AB3 B2, AB2, AB4

Para construir los bloques, observamos que se debe confundir el efecto A, luego en la ecuación definitoria $L= \alpha_1 x_1 + \alpha_2 x_2$, se fijan los valores $\alpha_1 = 1$ y $\alpha_2 = 0$. Esto define la ecuación definitoria

$L = x_1$

en que x_1 toma los valores 1, 2 o 3, según el nivel en que se encuentre el factor A, en cada una de las combinaciones de tratamientos. Los bloques se forman agrupando aquellas combinaciones de tratamientos que generan el mismo residuo, si se divide el valor de L por 3.

Este puede ser 0, si L es múltiplo de 3; si no lo es puede tomar los valores 1 o 2. En este caso L es idéntico al valor de x_1, el nivel del factor A, por lo tanto cada bloque está determinado por las combinaciones de tratamientos en las que el factor A está al mismo nivel. Los bloques son, entonces,

BLOQUE I		BLOQUE II		BLOQUE III
a_1b_1 a_1b_2 a_1b_3		a_2b_1 a_2b_2 a_2b_3		a_3b_1 a_3b_2 a_3b_3

Compararemos los resultados que se obtendrían si se hubiera efectuado el experimento en alguno de los bloques. La siguiente es la tabla de respuestas del experimento completo, con los valores de las respuestas dadas más arriba:

COMPONENTE	1	A1		A2		B1		B2	
a_1b_1	10	10		10		10		10	
a_2b_1	15				15	15		15	
a_3b_1	12		12	12		12		12	
a_1b_2	21	21		21					21
a_2b_2	8				8				8
a_3b_2	19		19	19					19
a_1b_3	30	30		30			30	30	
a_2b_3	16				16		16	16	
a_3b_3	18		18	18			18	18	
TOTAL	149	61	49	110	39	37	64	101	48
FACTOR	1	-1	1	1	-2	-1	1	1	-2
TOTAL PONDERADO	149	-61	49	110	-78	-37	64	101	96
NETO	149		12		32		27		5
DIVISOR	9		3		6		3		6
EFECTO	16.6		4.0		5.3		9.0		0.8
RANGO			6		4		1		8

Tabla 5.6 - Tabla de Respuestas para el Diseño 3^2 del Ejemplo 5.2 . Primera parte.

COMPONENTE	1	AB 1		AB 2				AB 3				AB4		
a_1b_1	10	10		10				10				10		
a_2b_1	15									15			15	
a_3b_1	12		12		12			12				12		
a_1b_2	21					21							21	
a_2b_2	8													8
a_3b_2	19						19						19	
a_1b_3	30		30	30					30			30		
a_2b_3	16										16		16	
a_3b_3	18	18			18				18			18		
TOTAL	149	28	42	40	30	21	19	22	48	15	16	70	71	8
FACTOR	1	1	-1	-1	1	2	-2	-1	2	1	-2	1	-2	4
TOTAL PONDERADO	149	28	-42	-40	30	42	-38	-22	30	48	-32	70	-142	32
NETO	149		14				6				24			40
DIVISOR	9		2				4				4			8
EFECTO	16.6		7.0				1.5				6.0			5.0
RANGO			2				7				3			5

Tabla 5.7 - Tabla de Respuestas para el Diseño 3^2 del Ejemplo 5.2. Segunda parte.

Las siguientes son las tablas de respuestas que se hubieran obtenido si el experimento se hubiera llevado a cabo en cada uno de los bloques I, II y III, respectivamente:

COMPONENTE	1	A1		A2		B1		B2	
a_1b_1	10	10		10		10		10	
a_1b_2	21	21		21					21
a_1b_3	30	30		30			30	30	
TOTAL	61	61	0	61	0	10	30	40	21
FACTOR	1	-1	1	1	-2	-1	1	1	-2
TOTAL PONDERADO	61	-61	0	61	0	-10	30	40	-42
NETO	61		61		61		20		2
DIVISOR	3		3		3		1		2
EFECTO	20.3		20.3		20.3		20.0		1.0
RANGO			1		1		1		6

Tabla 5.8 - Tabla de Respuestas para el Diseño 3^2 del Ejemplo 5.2. Bloque I, Primera parte

COMPONENTE	1	AB 1		AB 2				AB 3				AB4		
a_1b_1	10	10		10				10				10		
a_1b_2	21				21								21	
a_1b_3	30		30	30						30		30		
TOTAL	61	10	30	40	21	0	0	10	30	0	0	40	21	0
FACTOR	1	1	-1	-1	1	2	-2	-1	2	1	-2	1	-2	4
TOTAL PONDERADO	61	10	-30	-40	21	0	0	-10	60	0	0	40	-42	0
NETO	61		20				19				50			2
DIVISOR	3		1				2				1			2
EFECTO	20.3		20.0				9.5				50.0			1.0
RANGO			2				3				1			4

Tabla 5.9 - Tabla de Respuestas para el Diseño 3^2 del Ejemplo 5.2. Bloque I, Segunda parte.

COMPONENTE	1	A1		A2		B1		B2	
a_2b_1	15				15		15	15	
a_2b_2	8				8				8
a_2b_3	16				16	16		16	
TOTAL	39	0	0	0	39	16	15	31	8
FACTOR	1	-1	1	1	-2	-1	1	1	-2
TOTAL PONDERADO	39	0	0	0	-78	-16	15	31	-16
NETO	39		0		78		1		15
DIVISOR	3		0		3		1		2
EFECTO	13.0		--		26.0		1.0		7.5
RANGO			6		1		4		2

Tabla 5.10 - Tabla de Respuestas para el Diseño 3^2 del Ejemplo 5.2. Bloque II, Primera parte.

COMPO-NENTE	1	AB	1		AB	2			AB	3			AB4	
a_2b_1	15								15				15	
a_2b_2	8													8
a_2b_3	16										16		16	
TOTAL	61	0	0	0	0	0	0	0	15	0	16	0	31	8
FACTOR	1	1	-1	-1	1	2	-2	-1	2	1	-2	1	-2	4
T. PONDERADO	61	0	0	0	0	0	0	0	30	0	-32	0	-62	32
NETO	61		0				0				2			30
DIVISOR	3		0				0				1			4
EFECTO	20.3		--				--				2.0			7.5
RANGO			2				3				1			4

Tabla 5.11 - Tabla de Respuestas para el Diseño 3^2 del Ejemplo 10. Bloque II, Segunda parte.

COMPO-NENTE	1	A1		A2		B1		B2	
a_1b_1	12	12		12		12		12	
a_1b_2	19	19		19					19
a_1b_3	18	18		18			18	18	
TOTAL	49	49	0	49	0	12	18	30	19
FACTOR	1	-1	1	1	-2	-1	1	1	-2
T. PONDERADO	49	-49	0		0	-10	30	40	-42
NETO	49		49		49		20		2
DIVISOR	3		0		3		1		2
EFECTO	20.3		--		20.3		20.0		1.0
RANGO			--		1		1		6

Tabla 5.12 - Tabla de Respuestas para el Diseño 3^2 del Ejemplo 10. Bloque III, Primera parte.

COMPO-NENTE	1	AB	1		AB	2			AB	3			AB4	
a_1b_1	12		12	12				12				12		
a_1b_2	19					19							19	
a_1b_3	18	18		18						18		18		
TOTAL	49	18	12	30	0	19	0	12	0	18	0	30	19	0
FACTOR	1	1	-1	-1	1	2	-2	-1	2	1	-2	1	-2	4
T. PONDERADO	61	18	-12	-30	0	38	0	-12	0	18	0	30	-38	0
NETO	61		6				8				6			8
DIVISOR	3		1				2				1			2
EFECTO	20.3		20.0				4.0				6.0			4.0
RANGO			2				3				1			4

Tabla 5.13 - Tabla de Respuestas para el Diseño 3^2 del Ejemplo 10. Bloque III, Segunda parte.

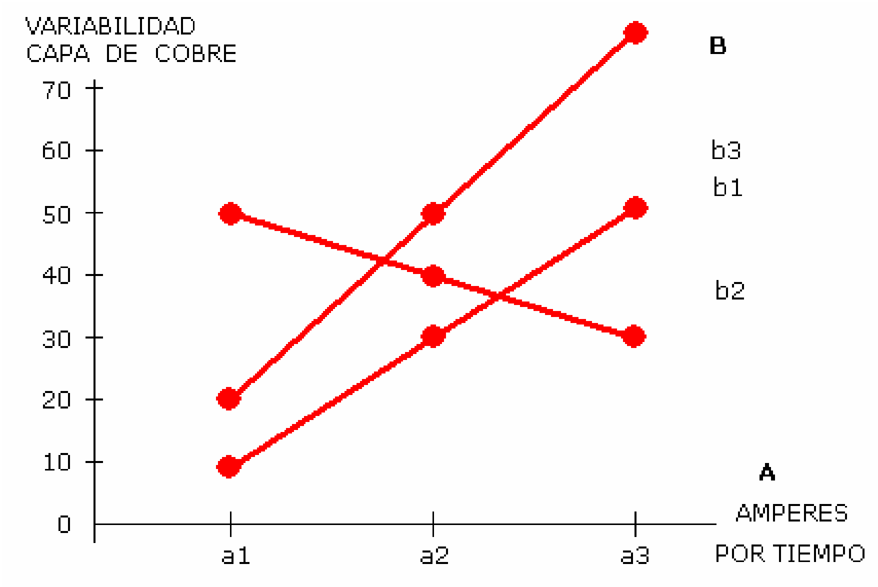
En casos de factores con más de dos niveles, el número de corridas experimentales necesarias para realizar el experimento aumenta más rápidamente aún, que en el caso de dos niveles. Los ejemplos dados arriba, es decir, 3^2 , 3x5x6, 5^4 , 2^3x3^4 , requieren de 9, 90, 625 y 720 combinaciones de tratamientos, respectivamente, si se desea hacer los experimentos completos. Por eso, este tipo de experimentos es usual que se efectúen en forma fraccionada.

Finalmente, debemos hacer notar que los análisis mostrados hasta aquí tienen sólo el carácter de exploratorio. Para un análisis confirmatorio posterior, se emplea la técnica llamada *Análisis de Varianza*, que tiene por objeto establecer cuán significativo es cada uno de los efectos principales e interacciones, y cuán significativos son los contrastes que componen cada efecto, así como interpretar con precisión el comportamiento funcional de la respuesta, frente al estímulo de los factores. Algunos elementos del Análisis de Varianza se darán en el capítulo siguiente.

EJERCICIOS

5.1) Un diseño experimental tiene por objeto determinar los factores que inciden en la variabilidad del espesor de las capas de cobreado de placas para circuitos impresos. El ingeniero del proceso determina que hay dos fuentes potenciales de variabilidad. Ellas son, la concentración de cobre en la solución y los amperios por tiempo de la electrólisis. A cada uno de estos factores se le asignaron tres niveles. Designaremos a los factores A y B, respectivamente. Los niveles de A los llamaremos a_1 ,a_2 , y a_3 ; los de B los llamaremos b_1 , b_2 , y b_3 . La respuesta es una medida de variabilidad del espesor de la capa de cobre, observada en seis puntos de la placa.

Se corrió el experimento, con cuatro réplicas por combinación de tratamientos. El siguiente gráfico muestra los valores promedio de la respuesta, por cada nivel del factor A, estratificado por B:



a) Dibuje el gráfico de interacción del factor B, estratificado por el factor A.
b) Interprete los resultados, en el sentido de si hay o no efectos principales de A o de B, y si hay interacción entre ambos factores, concentración de cobre y amperios por tiempo.

5.2) Se pretende disminuir el roce del eje con sus dos descansos, de un pequeño motor utilizado para girar el lente de una proyectora autofoco. El diámetro del eje es fijo. Se puede variar el diámetro del orificio de los descansos y el grado de viscosidad del lubricante. Supóngase que estos son dos factores de un diseño.

Sean a_1 ,a_2 , y a_3 los niveles del factor diámetro, y b_1 , b_2 , y b_3 los niveles del factor viscosidad. La respuesta es la fuerza transmitida por el eje, mientras gira a una velocidad de operación standard. La siguiente tabla muestra los valores de las respuestas, registradas por cada combinación de tratamientos:

COMBINACION DE TRATAMIENTOS	RESPUESTA (FUERZA TRANSMITIDA)
a_1b_1	59
a_2b_1	38
a_3b_1	59
a_1b_2	99
a_2b_2	16
a_3b_2	65
a_1b_3	19
a_2b_3	42
a_3b_3	35

a) Construya la tabla de respuestas y calcule los efectos.
b) Dibuje el diagrama de efectos.
c) Dibuje los gráficos de interacción, para ambos factores.
d) Interprete y compare los resultados obtenidos.

5.3) Repita lo del ejercicio 5.2, con los siguientes datos:

COMBINACION DE TRATAMIENTOS	RESPUESTA (FUERZA TRANSMITIDA)
a_1b_1	25
a_2b_1	23
a_3b_1	21
a_1b_2	39
a_2b_2	28
a_3b_2	67
a_1b_3	17
a_2b_3	45
a_3b_3	33

5.4) Repita lo del ejercicio 5.2, con los siguientes datos:

COMBINACION DE TRATAMIENTOS	RESPUESTA (FUERZA TRANSMITIDA)
a_1b_1	28
a_2b_1	39
a_3b_1	22
a_1b_2	32
a_2b_2	29
a_3b_2	26
a_1b_3	24
a_2b_3	27
a_3b_3	18

5.5) En un proceso de fabricación de jabón, se desea bajar el grado de acidez del producto final. Se hace variar el contenido de dos compuestos que intervienen en el proceso de fabricación, y que llamaremos A y B. Se decide darle tres niveles a cada uno, que corresponden a tres cantidades distintas. Sean a_1 , a_2 , a_3 , b_1 , b_2 , y b_3 , respectivamente, los niveles de los dos factores. Se hace un diseño factorial fraccionado 3^{2-1} , es decir, dos factores a tres niveles cada uno, fraccionado en tres bloques de tres combinaciones de tratamientos, de los cuáles se correrá uno.

Supóngase que se pudiera correr el experimento completo, dando por resultado las repuestas que se muestran en la tabla de más abajo, que también muestra la disposición de los bloques.

	COMBINACION DE TRATAMIENTOS	RESPUESTA (FUERZA TRANSMITIDA)
BLOQUE I	a_1b_1 a_1b_2 a_1b_3	27 34 31
BLOQUE II	a_2b_1 a_2b_2 a_2b_3	28 41 42
BLOQUE III	a_3b_1 a_3b_2 a_3b_3	31 32 35

a) Construya la tabla de respuestas y calcule los efectos.
b) Dibuje el diagrama de efectos.
c) Dibuje los gráficos de interacción.
d) Interprete y compare los resultados anteriores.
e) Construya la matriz de diseño.
f) Encuentre los efectos confundidos con bloques, y los grupos de efectos confundidos entre sí.
g) Critique el diseño, según los resultados obtenidos.

5.6) Repita lo del ejercicio 5.5, con los siguientes datos:

	COMBINACION DE TRATAMIENTOS	RESPUESTA (FUERZA TRANSMITIDA)
BLOQUE I	a_1b_1 a_2b_2 a_3b_3	27 34 31
BLOQUE II	a_2b_1 a_3b_2 a_1b_3	28 41 42
BLOQUE III	a_3b_1 a_1b_2 a_2b_3	31 32 35

5.7) En el proceso de fabricación de hilo, se comienza con la limpieza del algodón. Al final de este proceso, se produce una napa formada por fibras de algodón limpias. Esta napa debe presentar una determinada regularidad en su densidad, de modo que el producto final, el hilo, sea homogéneo. Se diseñó un experimento para determinar el efecto de la carga del algodón en una camilla que alimenta el sistema, sobre la regularidad de la napa.

Los factores son dos:

1) El grosor de los trozos de algodón introducidos a la camilla de alimentación, con tres niveles, 5 cm., 8 cm. y 12 cm.

2) La colocación de los trozos de algodón en la camilla, con tres niveles, sobrepuestos, uno a continuación del otro, y separados en 10 cm.

La respuesta es el coeficiente de variación (CV) calculado de los pesos de treinta trozos de una yarda de longitud, de la napa.

La siguiente tabla muestra un diseño fraccionado en bloques, y los valores de las respuestas, del experimento completo.

	EFECTO									RESPUESTA
	1	A1	A2	B1	B2	AB1	AB2	AB3	AB4	(CV)
BLOQUE I	1	0	2	1	1	0	0	2	2	12
	1	1	-1	0	-2	0	-2	0	2	4
	1	0	2	0	-2	0	0	0	-4	5
BLOQUE II	1	1	-1	1	1	1	1	-1	-1	13
	1	-1	-1	0	-2	0	2	0	2	10
	1	0	2	-1	1	0	0	-2	2	5
BLOQUE III	1	-1	-1	-1	1	1	-1	1	-1	9
	1	-1	-1	1	1	-1	-1	-1	-1	14
	1	1	-1	-1	1	-1	1	1	-1	6

a) Construya la tabla de respuestas y calcule los efectos.
b) Dibuje el diagrama de efectos.
c) Dibuje los gráficos de interacción.
d) Interprete y compare los resultados anteriores.
e) Encuentre las combinaciones de tratamientos correspondientes a cada fila.
f) Encuentre los efectos confundidos con bloques, y los grupos de efectos confundidos entre sí.
g) Critique el diseño, según los resultados obtenidos.

5.8) Repita lo del ejercicio 5.7, con los siguientes datos:

	EFECTO									RESPUESTA
	1	A1	A2	B1	B2	AB1	AB2	AB3	AB4	(CV)
BLOQUE I	1	1	-1	1	1	1	1	-1	-1	14
	1	0	2	-1	1	0	0	-2	2	9
	1	1	-1	-1	1	-1	1	1	-1	14
BLOQUE II	1	1	-1	0	-2	0	-2	0	2	11
	1	0	2	0	-2	0	0	0	-4	11
	1	-1	-1	0	-2	0	2	0	2	15
BLOQUE III	1	1	-1	-1	1	-1	1	1	-1	12
	1	-1	-1	1	1	-1	-1	-1	-1	7
	1	-1	-1	-1	1	1	-1	1	-1	12

5.9) Un dispositivo de seguridad automático antisísmico funciona mediante una bolita de cristal que desliza a través de una rampa, llega a un interruptor, lo acciona e interrumpe el suministro eléctrico. Interesa minimizar el tiempo que demora en llegar al interruptor. Las distancias horizontal y vertical que recorre la bolita están determinadas para que llegue con la fuerza necesaria, y son fijas. Se puede variar la forma de la rampa, y el ángulo de la rampa. El diseño es el siguiente:

FACTORES		NIVELES
A.-	FORMA DE LA RAMPA	a_1 - sección angular
		a_2 - sección semi circular
		a_3 - sección semi rectangular
B.-	ANGULO DE LA RAMPA	b_1 - 5 º
		b_2 - 10 º
		b_3 - 15 º

RESPUESTA: Tiempo de recorrido, en décimas de segundos.

Se corrió el experimento, dando por resultado los siguientes valores:

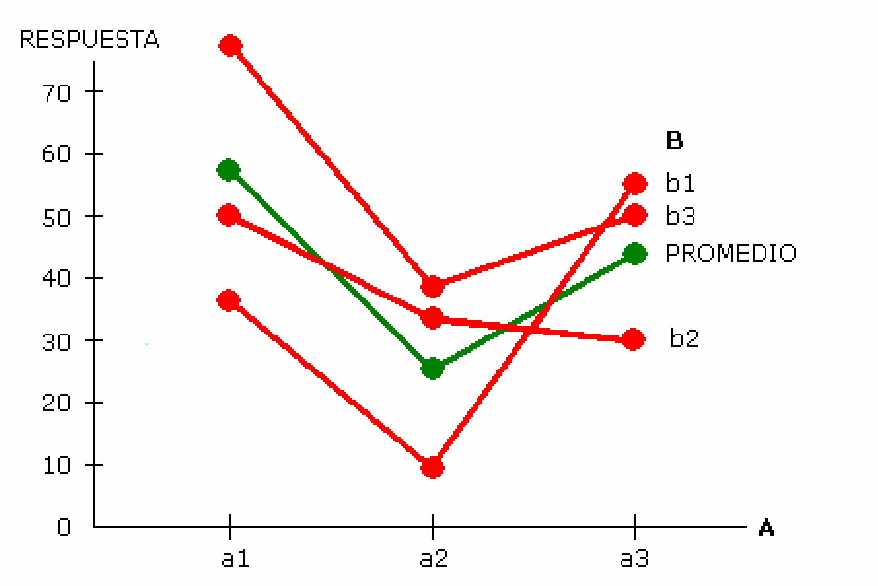
COMBINACION DE TRATAMIENTOS	RESPUESTA
a_1b_1	21
a_2b_1	32
a_3b_1	24
a_1b_2	19
a_2b_2	21
a_3b_2	15
a_1b_3	18
a_2b_3	25
a_3b_3	16

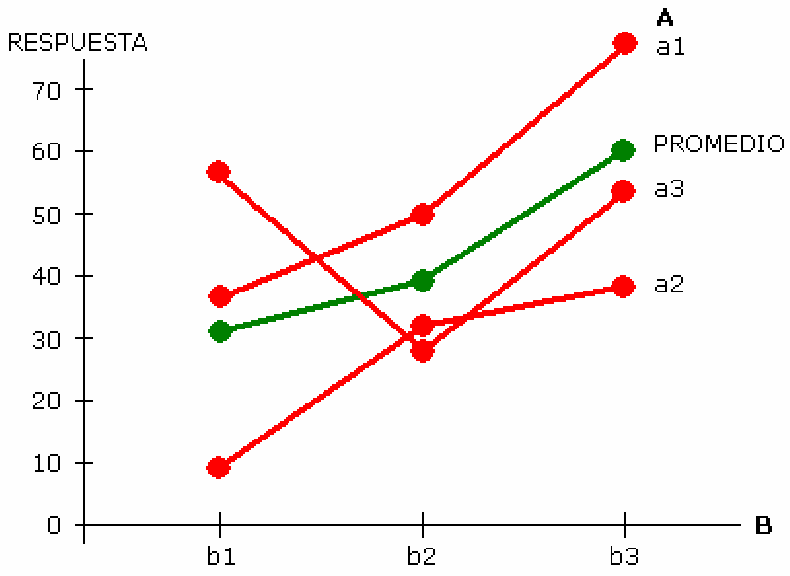
a) Construya los dos gráficos de interacción: Respuesta versus A, estratificado por B, y Respuesta versus B, estratificado por A.

b) Interprete detalladamente estos gráficos, en términos de los elementos dados en el enunciado del problema. Si se fuera a realizar otro experimento, con los mismos factores, con el objeto de obtener más información relacionada con este problema, ¿ Qué valores recomendaría dar al ángulo de la rampa ?

5.10) Se diseñó un experimento con el objeto de determinar el efecto de dos factores, sobre la dureza de la película de pintura. Los factores son, la humedad relativa del aire, y la temperatura del temperatura, durante el secado, ambos factores con tres niveles.

Se hizo el experimento, y con los resultados se construyeron los siguientes gráficos de interacción. Interprételos los gráficos: ¿ Qué tipo de efectos principales hay, está presente algún tipo de interacción ?





5.11) Diseñe un experimento, relacionado con un proceso con el que Ud. está familiarizado. Use la siguiente pauta como guía, sin señirse necesariamente a ella:

a) Planteo del problema, marco conceptual, objetivos del estudio.
b) Descripción de los factores y sus niveles.
c) Descripción de la respuesta.
d) El diseño Bloque completo o fraccionado. Si es fraccionado, indique la composición de los bloques, y qué efectos se confunden.
e) Realización física del experimento. Días y horas de las distintas corridas experimentales, duración de cada una. Orden en que se van a hacer, indicando las condiciones experimentales de cada una.
f) Variables que se van a medir, y la forma cómo se efectuarán las mediciones.
g) Limitaciones: Posibles factores no deseados que pudieran influir, y cómo disminuir su efecto.
h) Técnicas de análisis de los resultados.
i) Posible prosecución del estudio.

CAPITULO 6

ELEMENTOS DE ANALISIS DE VARIANZA

Las técnicas introducidas hasta aquí, para determinar la significación de efectos causados por factores experimentales, tienen solo carácter de exploratorio. Para un análisis de tipo confirmatorio se utiliza la técnica denominada Análisis de Varianza (ANOVA).

Esencialmente consiste en la descomposición de la variabilidad total presente en las respuestas, en componentes que pueden ser atribuibles a cada uno de los efectos considerados en el experimento. La posibilidad de hacer esto se basa en propiedades algebraicas que permiten descomponer una medida de variabilidad especifica, y que definiremos más adelante, en términos aditivos, cuyas magnitudes dependen individualmente de los distintos efectos determinados por los factores. Es una técnica compleja, con muchas variantes. Aquí sólo se presentarán los principios en que se basa y la forma de aplicarse.

6.1. - El Modelo Lineal

El análisis de varianza que estudiaremos en este capítulo se basa en modelos que suponen que la respuesta de un experimento puede representarse como una suma ponderada de efectos, unos atribuidos a los diversos factores, otros atribuidos a las interacciones entre factores, entre otros. O sea, la respuesta es una función lineal de los efectos de los factores y las interacciones, de ahí que se les denomina modelos lineales.

En los Capítulos 2 y 3, vimos expresiones para los efectos principales e interacciones, en términos de las respuestas, en experimentos a dos y a tres factores, respectivamente. Los modelos lineales que veremos en este capítulo, son expresiones para las repuestas, en términos de los efectos.

Entonces estos modelos lineales no son muy novedosos, sólo se modifica la forma de los valores o parámetros. Son lo que se llama una reparametrización. Sin embargo, esta nueva forma tiene ventajas en cuanto a la interpretación, en términos del análisis de varianza, que introduciremos en este capítulo.

Verificaremos esto en el caso del experimento a dos factores:

Partiendo de las expresiones de los efectos e interacciones, construiremos expresiones para las respuestas, simplemente resolviendo las ecuaciones correspondientes.

Recordemos que en Capítulo 1 dimos las siguientes expresiones para los diversos efectos, en términos de las respuestas a_ib_j. Comenzando por el efecto medio,

$$1 = \frac{1}{4}(a_1b_1+a_2b_1+a_1b_2+a_2b_2)$$

Si usamos los símbolos *"y"* en lugar de *"ab",* queda

$$1 = \frac{1}{4}(y_{11}+y_{21}+y_{12}+y_{22})$$

Lo mismo para los demás:

$$A = 1/2\ ((a_2b_1 + a_2b_2) - (a_1b_1 + a_1b_2)) = 1/2\ ((y_{21} + y_{22}) - (y_{11} + y_{12}))$$

$$B = 1/2\ ((a_1b_2 + a_2b_2) - (a_1b_1 + a_2b_1)) = 1/2\ ((y_{12} + y_{22}) - (y_{11} + y_{21}))$$

$$AB = 1/2\ ((a_2b_2 - a_2b_1) - (a_1b_2 - a_1b_1)) = 1/2\ ((y_{22} + y_{11}) - (y_{21} + y_{12}))$$

Sólo debemos resolver estas cuatro ecuaciones lineales para y_{11}, y_{12}, y_{21} e y_{22} en términos de 1, *A, B y AB:*

Si calculamos la expresión $1 + \frac{1}{2}A + \frac{1}{2}B + \frac{1}{2}AB$, vemos que es igual a:

$$\frac{1}{4}[(y_{11}+y_{21}+y_{12}+y_{22}) + (y_{21} + y_{22} - y_{11} - y_{12})$$
$$+ (y_{12} + y_{22} - y_{11} - y_{21}) + (y_{22} + y_{11}) - y_{21} - y_{12})] = y_{22}$$

luego

$$y_{22} = 1 + \frac{1}{2}A + \frac{1}{2}B + \frac{1}{2}AB$$

de forma análoga, se tienen las expresiones

$$y_{11} = 1 - \frac{1}{2}A - \frac{1}{2}B + \frac{1}{2}AB$$
$$y_{21} = 1 + \frac{1}{2}A - \frac{1}{2}B - \frac{1}{2}AB$$
$$y_{12} = 1 - \frac{1}{2}A + \frac{1}{2}B - \frac{1}{2}AB$$

Se puede observar que la sucesión de signos (+) o (-) en cada expresión es la respectiva fila de la matriz de diseño. Si definimos los siguientes términos:

$\mu = 1$, $\quad \alpha_1 = -\frac{1}{2}A$, $\quad \alpha_2 = \frac{1}{2}A$, $\quad \beta_1 = -\frac{1}{2}B$, $\quad \beta_2 = \frac{1}{2}B$,

$\alpha\beta_{11} = \frac{1}{2}AB$, $\quad \alpha\beta_{12} = -\frac{1}{2}AB$, $\quad \alpha\beta_{21} = -\frac{1}{2}AB$, $\quad ,\alpha\beta_{22} = \frac{1}{2}AB$

se puede escribir

$$y_{11} = \mu + \alpha_1 + \beta_1 + \alpha\beta_{11}$$
$$y_{12} = \mu + \alpha_1 + \beta_2 + \alpha\beta_{12}$$
$$y_{21} = \mu + \alpha_2 + \beta_1 + \alpha\beta_{21}$$
$$y_{22} = \mu + \alpha_2 + \beta_2 + \alpha\beta_{22}$$

Esto último es una reparametrización de la expresión. En forma general,

$$y_{ij} = \mu + \alpha_i + \beta_j + \alpha\beta_{ij} \qquad i = 1, 2; \qquad j = 1, 2$$

Hemos derivado expresiones para las respuestas, en términos de los efectos. Sólo falta introducir en el modelo, términos que expliquen el hecho que, cuando se replica el experimento, bajo las mismas condiciones experimentales (iguales niveles en los factores), los resultados observados no son iguales. Hay una variabilidad presente, no atribuible a los factores, y que denominaremos error aleatorio. De esta forma queda definido un modelo lineal para un experimento factorial a dos factores,

$$y_{ij} = \mu + \alpha_i + \beta_j + \alpha\beta_{ij} + e_{ij} \qquad i = 1, 2; \qquad j = 1, 2$$

con las condiciones adicionales

$\alpha_1 + \alpha_2 = 0, \qquad \beta_1 + \beta_2 = 0$

$\alpha\beta_{11} + \alpha\beta_{12} = 0, \qquad \alpha\beta_{21} + \alpha\beta_{22} = 0, \qquad \alpha\beta_{11} + \alpha\beta_{21} = 0, \qquad \alpha\beta_{12} + \alpha\beta_{22} = 0,$

Con las condiciones adicionales dadas arriba, y en que e_{ij} es el término correspondiente al error aleatorio.

Otros ejemplos de modelos lineales son los siguientes:

$$y_i = \mu + e_i \qquad i = 1,2, \ldots, \qquad (6.1)$$

$$y_{ir} = \mu + \alpha_i + e_{ir} \qquad i = 1,2,...,I;\ r = 1,2,...,\ R \qquad (6.2)$$

$$y_{ijr} = \mu + \alpha_i + \beta_j + e_{ijr} \qquad i = 1,2,...,\ I;\ j = 1,2,...,\ J;\ r = 1,2,...,R \qquad (6.3)$$

$$y_{ijr} = \mu + \alpha_i + \beta_j + \alpha\beta_{ij} + e_{ijr} \qquad i = 1,2,...,\ I;\ j = 1,2,...,\ J;\ r = 1,2,...,\ R \qquad (6.4)$$

$$y_{ijkr} = \mu + \alpha_i + \beta_j + \gamma_k + \alpha\beta_{ij} + \alpha\gamma_{ik} + \beta\gamma_{jk} + e_{ijkr}$$

i = 1,2,..., *I; j* = 1,2,..., *J; k* = 1,2,..., *K;* r = 1,2,..., *R.* (6.6)

Cada uno de estos modelos lineales nos da una particular estructura de los datos, relacionada con el tipo de experimento que los generó:

El modelo (6.1) corresponde a un grupo de observaciones efectuadas bajo las mismas condiciones experimentales. Cada observación es igual a un promedio global μ, más un término correspondiente a la variabilidad natural, e_i, denominado error aleatorio.

El modelo (6.2) corresponde a un experimento a un factor con *I* niveles y *R* réplicas. La repuesta se muestra descompuesta en un valor promedio global μ, más un efecto α_i, propio del i-ésimo nivel del factor, más un término que corresponde a un error aleatorio, propio de cada observación, no atribuible al factor.

El modelo (6.:3) corresponde a un experimento a dos factores, el primero con *1* niveles, el segundo con *J* niveles, a *R* réplicas cada uno. Cada observación es igual a un promedio global μ, más un efecto α_i atribuido al primer factor, y un efecto β_j, atribuido al segundo factor, y más un error aleatorio e_{ijr}. Este modelo lineal asume que no hay interacción entre los factores, o que el efecto de la interacción es despreciable.

El modelo (6.4) es similar al modelo (6.3), pero aquí se asume que hay interacción, y la cuantificación de su efecto es el término $\alpha\beta_{ij}$, que corresponde al aporte de la interacción, del i-ésimo nivel del primero, y *j*-ésimo nivel del segundo.

El modelo (6.5) corresponde a un experimento a tres factores, en que hay efectos de los factores, o efectos principales, más las tres interacciones dobles y la interacción triple.

Los términos μ, α_i, β_j, etc., se denominan parámetros de los modelos. Con el objeto de estandarizar los valores de los parámetros, se agregan condiciones adicionales sobre estos términos. Estas condiciones son que las sumas sobre cualquiera de los subíndices es cero.
Así

$$\alpha_1 + \alpha_2 + ... + \alpha_I = 0$$

$$\beta_1 + \beta_2 + ... + \beta_J = 0$$

$$\alpha\beta_{1j} + \alpha\beta_{2j} + ... + \alpha\beta_{Ij} = 0\ , \qquad \text{para todo valor de j,}$$

$$\alpha\beta_{i1} + \alpha\beta_{i2} + ... + \alpha\beta_{iJ} = 0\ , \qquad \text{para todo valor de i.}$$

Con estas condiciones los valores de estos parámetros quedan determinados en forma única, y además se agrega una simetría a los modelos, que resulta conveniente para efectuar los cálculos necesarios para cuantificar los efectos. De esta forma, por ejemplo, en los modelos (6.2) a (6.5), los parámetros constituyen desviaciones en torno al promedio global. Lo mismo ocurre para los demás parámetros.

Para terminar este punto, diremos que los modelos lineales presentados en este capítulo son modelos apropiados para representar las respuestas en términos de los efectos principales e interacciones de los diseños experimentales factoriales.

En lo que sigue, presentaremos una técnica denominada *Análisis de Varianza,* utilizada para cuantificar los efectos de los factores y sus interacciones, sobre la respuesta del experimento, sin preocupamos del modelo lineal subyacente. Pero debemos tener presente que el respectivo modelo lineal es el que sustenta la técnica y justifica los procedimientos y las interpretaciones de los resultados.

6.2. - Análisis de Varianza a un factor

Supongamos que tenemos una situación experimental, con un factor de variación, y que diseñamos un experimento con un determinado número de réplicas, por cada nivel del factor. Las respuestas contienen variación, pues, como dijimos al principio, la varia ción esta presente en todo fenómeno. Sin embargo, la variación presente en la respuesta que observamos, la podemos descomponer en dos componentes.

Una componente es la variación causada por el factor. Esta variabilidad se denomina *variabilidad debida al factor,* o debida al *tratamiento.*

La otra componente es la variación aleatoria, propia del fenómeno, atribuible a un número grande de factores, que no controlamos, y que causan pequeñas dosis de variación, que observamos en su conjunto. Este tipo de variación esta presente, aún bajo idénticas condiciones experimentales. Esta variabilidad se denomina *variabilidad residual.*

El método de Análisis de Varianza consiste en comparar ambos tipos de variación.

La variabilidad debido al factor se mide comparando los promedios de las respuestas de cada nivel del factor. La variabilidad residual se mide comparando las repuestas correspondientes a las réplicas de un mismo nivel del factor.

Daremos definiciones precisas para estos dos conceptos. Supóngase que el factor *A* tiene *I* niveles, y el número de réplicas por nivel es *R.* En la siguiente tabla se presenta la notación a utilizar:

y_{ir} = Respuesta individual correspondiente a la r-ésima réplica del nivel i-ésimo del factor $i = 1,2,\ldots,I;\ r = 1,2,\ldots.R.$		
Suma	**Promedio**	**Recorrido de la suma o promedio**
$A_i = \sum_r y_{ir}$	A_i/R	Todas las réplicas del i-ésimo nivel del factor *A.*
$T = \sum_i \sum_r y_{ir}$	T/RI	Todas las réplicas de todos los niveles del factor *A.*

Tabla 6.1: Notación para el análisis de varianza a un factor.

Se utilizará el símbolo $\sum$, denominado sumatoria, para expresar una suma. Por ejemplo, si tenemos una serie de números $a_1, a_2, a_3, \ldots, a_{20}$, la suma de todos ellos, $a_1 + a_2 + a_3 + \ldots + a_{20}$, se puede anotar, en forma condensada, como $\sum_{i=1}^{I} a_i$ o simplemente $\sum a_i$ cuando no hay ambigüedad sobre el recorrido del subíndice.

Definimos los siguientes términos, que son medidas de variación de cada una de las dos componentes mencionadas, la variabilidad debida al factor, y la variabilidad residual. En cada una se indica la causa de la variación, denominada *fuente de variación:*

Variación Total: Es la variabilidad debida al factor y la variabilidad aleatoria reunidas. La *suma de* *cuadrados total* es una medida de toda la variación presente en el conjunto de las respuestas observadas, y es igual al número

$$SCT = \sum_i \sum_r \left(y_{ir} - \frac{T}{IR} \right)^2$$

La doble sumatoria indica que se está sumando a través de los *I* niveles y a través de las *R* réplicas de cada uno. Son *I* x *R* términos al cuadrado, que se suman. El objeto de elevar al cuadrado es eliminar los signos negativos, que tenderían a anularse con los positivos. La Suma de Cuadrados Total es la suma de los cuadrados de las desviaciones de todas las observaciones, con respecto del promedio global.

Variación atribuible al factor: Se define una medida de la variabilidad causada por el factor, y que se denomina suma de cuadrados del factor, o suma de cuadrado del tratamiento, y es igual al número

$$SCA = R\sum_i \left(\frac{A_i}{R} - \frac{T}{IR} \right)^2$$

Es proporcional a la suma de los cuadrados de las desviaciones de las respuestas promedio por cada nivel del factor, con respecto del promedio global. Es una medida de los efectos debidos a los niveles del factor.

Variación Residual: Es la variación que no está explicada por los elementos que intervienen en el experimento, o variación atribuible a error experimental. Se debe a causas que no son controladas por el experimentador. La variación residual la mide la suma de cuadrados residual, y es igual a

$$SCR = \sum_i \sum_r \left(y_{ir} - \frac{A_i}{R} \right)^2$$

Es la suma de los cuadrados de las desviaciones de las observaciones, con respecto del respectivo promedio por cada nivel del factor. Es una medida de la variación producida dentro de cada nivel del factor, es decir, una medida del error aleatorio.

Estas tres medidas de variación, definidas de esta forma, presentan la particularidad de que la suma de las dos últimas es igual la primera. Es decir,

SCTotal = *SCA* + *SC* Residual

Esta propiedad se puede verificar fácilmente, haciendo el desarrollo algebraico de los cuadrados de los binomios y reduciendo los términos semejantes.

Los números de sumandos en cada una de las tres sumas de cuadrados son, respectivamente,*I*, *I(R-1),* e *IR.* Definiremos otros términos, que se denominan *grados de libertad,* y que están asociados al número de términos que se suman para formar cada una de las sumas de cuadrados. Son una medida de la cantidad de información independiente que se ha utilizado para calcular cada suma de cuadrados. Se presentan en la siguiente tabla:

Fuente de Variación	**Grados de Libertad (g.l.)**
Factor *A*	I-1
Residuo	*I(R* - 1)
Total	*IR-1*

Tabla 6.2: Grados de libertad para el Análisis de Varianza a un Factor.

Podemos observar que se cumple una relación similar a la relación entre las sumas de cuadrados,

g.l.Total = g.l. *A* + g.l. Residual

Cuadrados Medios. Se definen los cuadrados medios como los cuocientes entre las sumas de cuadrados y los respectivos grados de libertad. Los cuadrados medios son medidas de variabilidad promedio, por cada "unidad de información" aportada por las diversas fuentes de variación.

Cuociente F. El cuociente F es el cuociente entre el cuadrado medio de *A,* dividido por el cuadrado medio residual. Es, pues, una comparación entre la variabilidad promedio atribuible al factor *A,* y la variación promedio del error experimental, no atribuible a causas conocidas. Por lo tanto, la magnitud del cuociente F es una medida de la significación del efecto del factor *A.*

Como criterio para determinar cuán significativo es el efecto del factor, comparamos el valor del cuociente F con valores proporcionados por una tabla, llamada precisamente *tabla F,* copia de la cual aparece en el apéndice. Para usar la tabla, se debe buscar dos números, denominados *grados de libertad del numerador,* que corresponde a los grados de libertad del efecto *A,* cuyo cuadrado medio va en el numerador del cuociente F, y *grados de libertad del denominador,* que corresponde a los grados de libertad residual, cuyo cuadrado medio va en el denominador. Si el cuociente F supera el valor de la tabla, entonces se dice que el efecto es significativo. Este procedimiento de decisión, en estadística se denomina prueba de hipótesis. Consiste en decidir entre dos hipótesis, en base a evidencia muestral. En este caso, una hipótesis es que hay efecto debido al factor *A,* y la otra hipótesis es que no lo hay.

Una *prueba de hipótesis* está basada en consideraciones probabilísticas. De hecho, la tabla que utilizamos es una tabla de probabilidades, y su aplicación supone que se cumplen algunas condiciones. Una de ellas es que las respuestas presenten una variación que obedece una ley de probabilidad normal. La discusión sobre ésta y las otras condiciones probabilísticas, escapa del contexto de estas notas, por lo que no abordaremos este asunto. La tabla F presentada en el apéndice es una de valores probabilísticos construida de tal forma que la probabilidad de concluir que el efecto es significativo, cuando en realidad no lo es, es de un 5 %. Este valor se denomina nivel de significación de la prueba de hipótesis. Existen tablas F para otros niveles de significación, pero 5 % es el valor más utilizado.

<u>EJEMPLO 6.1</u>

El departamento de adquisiciones de una gran empresa minera desea comprar una partida de extintores contra incendio, para renovar los existentes. Debe elegir entre cuatro marcas distintas, "Alpha", "Atlas", "Ambar" y "Argos". Se adoptó como uno de los criterios de decisión, la duración de la presión del extintor cargado. Para comparar las cuatro marcas, en cuanto a la pérdida de presión, se llevó a cabo un experimento, que consistió en cargar cinco extintores de cada marca, con la presión especificada, y medir la pérdida de presión, al cabo de tres meses. Los resultados obtenidos se muestran en la Tabla 6.3:

Factor Extintor		Réplica					Suma A_i	Promedio A_i/R
		r=1	r=2	r=3	r=4	r=5		
		Pérdida de presión						
1	ALFA	2.8	2.5	3.6	4.4	2.7	16.0	3.2
2	ATLAS	3.2	3.5	5.7	4.3	4.8	21.5	4.3
3	AMBAR	2.5	2.6	1.8	3.1	3.0	13.0	2.6
4	ARGOS	2.7	2.3	3.8	3.7	3.0	15.5	3.1
Total Global $T = 66.0$								
Promedio Global $T/IR = 3.3$								

Tabla 6.3: Respuestas del Ejemplo 6.1, totales y promedios globales y por nivel del factor.

Con estos datos, calculamos los valores de las sumas de cuadrados, de acuerdo a las fórmulas dadas más arriba:

<u>TOTAL</u>:

$$SCT = \sum_i \sum_r \left(y_{ir} - \frac{T}{IR} \right)^2$$

SCT = (2,8 - 3,3)² + (2,5 - 3,3)² + . . . + (3,0 _ 3,3)²
= 0,25 + 0,64 + 0,09 + 1,21 + 0,36
+ 0,01 + 0,04 + 5,76 + 1,00 + 2,25
+ 0,64 + 0,49 + 2,25 + 0,04 + 0,09
+ 0,36 + 1,00 + 0,25 + 0,16 + 0,09
SCT = 16,98

El cuadrado medio del total no se utiliza, por lo que no es necesario calculado.

FACTOR *A:*

$$SCA = R \sum_r \left(\frac{A_i}{R} - \frac{T}{IR} \right)^2$$

$SCA = 5\,[(3,2 - 3,3)^2 + (4,3 - 3,3)^2 + (2,6 - 3,3)^2 + (3,1 \_ 3,3)^2]$
SCA = 7,7

$$CMA = \frac{7.7}{4-1} = 2,567$$

RESIDUO:

La suma de cuadrados de residuo se puede obtener por diferencia de suma de cuadrados total *(SCT)* menos la suma de cuadrados del factor *A (SCA),* que da 16,98 -7,7 = 9,28. O bien, se puede utilizar la fórmula para el cálculo directo. Si se elige este camino,
no se requiere calcular la suma de cuadrados total. El cuadrado medio residual es

$$CMR = \frac{9.28}{4(5-1)} = O.580$$

Por último, el cuociente F está dado por

$$F = \frac{CMA}{CMR} = \frac{2.567}{0.580} = 4.43$$

Para buscar el valor de tabla, determinamos que los grados de libertad del numerador es igual a
I - 1 = 4 - 1 = 3, y los grados de libertad del denominador es I(*R* -1) = 4(5 -1) = 16. El valor de tabla, que denotaremos F(3, 16), es igual a F(3, 16) = 3.24.

Si comparamos el valor calculado, 4.43, vemos que es mayor que el valor de tabla,
por lo que concluimos que el efecto del factor *A* es significativo, lo que se interpreta como
que hay evidencia muestral suficiente que muestra que las respuestas difieren cuando los niveles son distintos. O sea, hay diferencias en la pérdida de la presión, de las diferentes marcas de extintores.

Si queremos saber cuál es la que presenta menos pérdida, observamos la tabla de datos, donde se muestran las pérdidas promedio, por marca. Vemos que "Ambar" es la mejor marca, con una pérdida promedio de *2.6*. La más deficiente es "Atlas", con una pérdida promedio de *4.3*. Este es un análisis aproximado.

Cabe hacer notar que el análisis realizado indica solamente que existe una diferencia significativa en la pérdida de presión entre las cuatro marcas de extintores consideradas. Sin embargo, ese análisis no permite establecer si las diferencias entre cada par de marcas son significativas o no. Por ejemplo, basados en el análisis global, no podemos concluir que la diferencia entre los extintores "Argos" y "Ambar" *(3,1- 2,6 = 0,5)* es significativa o no. Para ello debemos realizar el análisis usando el mismo procedimiento mostrado en el Ejemplo G.1, pero utilizando los datos correspondientes a los extintores "Argos" y "Ambar" solamente. Es decir, se hace una ANOVA para un experimento de un factor (marca extintor) a dos niveles ("Argos" y "Ambar"). Por ello, en ese caso, I= 2 y R = 5, donde cambia I.

6.3. - Tabla de análisis de varianza a un factor.

Una forma sistemática de organizar los resultados numéricos anteriores, es mediante una tabla, denominada *Tabla de Análisis de Varianza* o *ANOVA,* y que se muestra a continuación:

Fuente de Variación	Suma de Cuadrados	Grados de Libertad	Cuadrados Medios	Cuociente F
Factor A	SCA	I - 1	CM A = SCA/(I - 1)	CMA/CMR
Residuo	SCR	I(R - 1)	CMR = SCR/(R -1)	-
Total	SCT	IR-1	-	-

Tabla6.4: Análisis de varianza a un factor.

La tabla de análisis de varianza para los datos del Ejemplo 6.1 es la siguiente:

Fuente de Variación	Suma de Cuadrados	Grados de Libertad	Cuadrados Medios	Cuociente F
Factor *A*	7,7	3	2,567	4,43
Residuo	9,26	16	0,580	-
Total	16,98	19	-	-

Tabla 6.5: Análisis de varianza del Ejemplo 6.1

ESTUDIO DE CASO: DISTRIBUCIÓN DE OPERADORAS TELEFÓNICAS PARA LA RECEPCIÓN DE PEDIDOS.

Este caso ilustra la aplicación de la metodología de Diseño de Experimentos, al caso de mejoramiento de calidad en un proceso de servicios.

En el área de comercialización de una compañía distribuidora de gas envasado, se atiende a un gran número de clientes, que hacen pedidos por teléfono. En este recinto hay una central telefónica, elemento crítico para el negocio de la compañía, pues gran parte de sus ventas se hacen por vía de pedido telefónico.

Por la importancia que tiene el teléfono para esta empresa, se hizo necesario hacer un estudio para determinar la forma óptima de distribuir las operadoras telefónicas a lo largo del día.

La planta tiene un número fijo de líneas, cinco. Se distinguen cuatro periodos de dos horas cada uno: un período medio-alto en el flujo de llamadas; de 09:00 a 11:00 horas, un periodo alto; de 11:00 a 13:00, un periodo medio-bajo, de 13:00 a 15:00 horas, y un período bajo, de 15:00 a 17:00 horas. Se dispone de un total de 20 horas-operadora, que deben distribuirse de manera que hayan más operadoras en los periodos altos.

OBJETIVO DEL EXPERIMENTO: Estudiar el efecto de la distribución del número de operadoras sobre el tiempo de respuestas a las consultas de los usuarios externos del servicio.

DISEÑO DEL EXPERIMENTO: Un factor con siete niveles, según la siguiente descripción:

FACTOR	NIVELES
A: Número de Operadoras.	Los niveles se describen en la siguiente tabla

	Número De Operadoras Por Período				Total de
Nivel	Medio Alto	Alto	Medio Bajo	Bajo	Horas
a1	*2*	*10*	*4*	*4*	*20*
a2	*4*	*8*	*6*	*2*	*20*
a3	*4*	*8*	*4*	*4*	*20*
a4	*4*	*10*	*4*	*2*	*20*
a5	*6*	*6*	*4*	*4*	*20*
a6	*6*	*8*	*4*	*2*	*20*
a7	*6*	*10*	*2*	*2*	*20*

Tabla 6.6: Distribución de operadoras por período

Cada nivel del factor se aplicó durante una semana, y al final de la experiencia se repitió todo una vez más. El experimento completo demoró, entonces, 14 semanas.

RESPUESTA*:* Para medir el efecto de cada nivel del factor, la persona que distribuía el gas, entregaba un formulario al cliente, pidiéndole que anotara el tiempo que él estimaba se había demorado, desde que marco el número de teléfono, hasta que le respondió la operadora. La respuesta es el promedio de los tiempos indicados por los clientes, de cada una de las combinaciones de tratamientos.

6.4.- Análisis de Varianza de dos factores.

Extenderemos el método al caso de dos factores, *A* y *B,* con réplicas. El factor *A* tiene *1* niveles, el factor *B* tiene *J* niveles, y el diseño es balanceado, con *R* réplicas por cada combinación de tratamientos. La gran diferencia con el caso de un factor, es que la variabilidad debida a los factores tiene tres componentes, una debida a cada una de los dos factores, y una debida a la interacción entre ambos. Utilizaremos las siguientes convenciones notacionales, para el caso de dos factores:

y_{ij}	Respuesta individual correspondiente a la r-ésima réplica del nivel i-ésimo del factor *A* y del nivel j-ésimo del factor *B*	
Suma	Promedio	Recorrido de la Suma o Promedio
$A_i = \sum_j \sum_r y_{ijr}$	A_i/JR	Todas las réplicas de todos los niveles del factor B, del i-ésimo nivel del factor *A.*
$B_j = \sum_i \sum_r y_{ijr}$	B_j/IR	Todas las réplicas de todos los niveles del factor A, del j-ésimo nivel del factor *B.*
$AB_{ij} = \sum_r y_{ijr}$	AB_{ij}/R	Todas las réplicas del i-ésimo nivel del factor A, del j-ésimo nivel del factor *B.*
$T = \sum_i \sum_j \sum_r y_{ijr}$	T/IJR	Todas las réplicas de todos los niveles de los dos factores.

Tabla 6.7: Notación para el análisis de varianza a dos factores.

A continuación presentaremos las formulas análogas a las del caso de un factor, que representan medidas de variación, atribuibles a las fuentes de variación que se indican.

Variación Total: La suma de cuadrados total es una medida de toda la variación presente en el conjunto de las respuestas observadas, y es igual a

$$SCT = \sum_i \sum_j \sum_r \left(y_{ijr} - \frac{T}{IJR} \right)^2$$

Variación Atribuible a los Efectos Principales: Está constituida por las sumas de cuadrados de los factores *A* y *B,* respectivamente

$$SCA = JR \sum_i \left(\frac{A_i}{JR} - \frac{T}{IJR} \right)^2$$

$$SCA = IR \sum_j \left(\frac{A_i}{IR} - \frac{T}{IJR} \right)^2$$

Variación Atribuible a la Interacción: Es un efecto debido al hecho que un factor puede actuar en forma diferente, bajo los diferentes niveles del otro factor. La interacción está presente cuando el resultado de aplicar los dos factores no es la simple suma de efectos de cada uno, sino que, hay, además, un efecto combinado de ambos, producto de la forma como cada factor afecta al otro. La suma de cuadrados de la interacción es el número

$$SCAB = R \sum_i \sum_j \left(\frac{AB_{ij}}{R} - \frac{A_i}{JR} - \frac{B_j}{IR} + \frac{T}{IJR} \right)^2$$

Variación Residual: Variación no explicada por el modelo, o atribuible al error experimental. Es la variación que no está explicada por los elementos que intervienen en el experimento, como la variación en las respuestas correspondientes a diferentes replicas de una misma combinación de tratamientos. Su medida es la suma de cuadrados residual,

$$SCR = \sum_i \sum_j \sum_r \left(y_{ijr} - \frac{AB_{ij}}{R} \right)^2$$

La propiedad algebraica que permite la descomposición de la variación total, en componentes atribuibles a las diversas fuentes de variación, a que nos referimos más arriba, se expresa ahora como

SGT = SGA + SGB + SGAB + SGR

La verificación de esta igualdad se hace mediante un simple desarrollo algebraico de las expresiones de la mano derecha.

Los números de sumandos de los términos, en el orden que aparecen en la igualdad, son, respectivamente, *IJR, JR, IR, IJ, IJR.* Los grados de libertad son medidos de la cantidad de información independiente que se ha utilizado para calcular cada suma de cuadrados, y se presentan en la siguiente tabla:

Fuente de Variación	Grados de Libertad (g.l.)
Factor *A*	I-1
Factor *B*	*J-1*
Interacción *AB*	(*I-1)*(*J*-1) = IJ - I - *J* + 1
Residuo	*IJ(R-1) = IJR- IJ*
Total	*IJR -1*

Tabla 6.8: Grados de libertad para el análisis de varianza de dos factores.

Aquí también tenemos que:

g.l. Total = g.l. *A* + g.l. *B* + g.l. *AB* + g.l. Residuo

Los **Cuadrados Medios** son los cuocientes entre las sumas de cuadrados y los respectivos grados de libertad.

Los **cuocientes F** ahora son tres, y son los cuocientes entre los cuadrados medios de *A,* de *B* y de *AB,* divididos por los cuadrados medios del error, respectivamente. Son comparaciones entre la variabilidad promedio atribuible a cada efecto, y la variación promedio del error experimental. Como en el caso de un factor, la magnitud de los cuocientes F son una medida de la significación de cada fuente de variación.

Para determinar cuán significativos son los efectos de cada fuente de información, comparamos el valor del cuociente F con valores proporcionados por la tabla F. Se determinan los *grados de libertad del numerador,* que corresponde a los grados de libertad del efecto respectivo, y *grados de libertad del denominador,* que corresponde a los grados de libertad residual. Si el cuociente F supera el valor de la tabla correspondiente, entonces se dice que el efecto es significativo.

6.5.- Tabla de Análisis de Varianza Para Dos Factores.

Los valores calculados se organizan en una tabla Análisis de Varianza, ANOVA, que para el caso de dos factores, es la siguiente:

Fuente de Variación	Suma de Cuadrados	Grados de Libertad	Cuadrados Medios	Cuociente F
Factor *A*	*SCA*	1-1	CM *A* = *SCA/(I* - 1)	*CMA/CMR*
Factor *B*	*SCB*	*J-1*	*CMB = SCB/(J -1)*	*CMB/CMR*
Interacción *AB*	*SCAB*	*(I - 1)(J* - 1)	*CMAB = SCAB/(I -1)(J -1)*	*CMAB/CMR*
Residuo	*SCR*	*IJ(R* - 1)	*CMR = SCR/IJ(R -1)*	-
Total	*SCT*	*JIR* - 1	-	-

Tabla 6.9: Análisis de varianza a dos factores.

Los valores que no aparecen no son necesarios. La suma de cuadrados del total, se usa para obtener la suma de cuadrados residual, por diferencia, pues es más fácil calcular la primera. La suma de los cuatro primeros términos de las columnas de Sumas de Cuadrados y de Grados de Libertad son iguales al término correspondiente del Total.

EJEMPLO 6.2

Se utilizan filtros en una planta de agua potable. Se desea reducir el tiempo de filtrado, para 10 cual se diseña un experimento, con dos factores, la marca del filtro y la cantidad de Hidróxido de So dio, o Soda Cáustica (NaOH):

FACTORES	NIVELES
A: Marca del Filtro	a_1: Filtro utilizado actualmente.
	a_2: Filtro nuevo marca 1.
	a_2: Filtro nuevo marca 2.
B: Cantidad de NaOH	b_1: Alta.
	b_2: Baja.

RESPUEST*A:* Tiempo de filtrado de un estanque completo, en minutos.

<u>REPLICAS</u>: Hay cuatro réplicas por cada combinación de tratamientos, r =1, 2, 3, 4.

El numero de corridas experimentales es 3x2x4 = 24. Se hizo el experimento, y los resultados son los siguientes:

FACTOR A	FACTOR B j=1	j=2	SUMAS			PROMEDIOS		
	OBSERVACIONES		AB_{i1}	AB_{i2}	A_i	AB_{i1}/R	AB_{i2}/R	A_i/JR
i = 1	33 32 29 27	38 31 29 34	121	132	253	30.25	33.00	31.62
i=2	26 24 25 29	29 27 30 29	104	115	219	26.00	28.75	27.38
i=3	29 36 30 27	34 34 39 29	122	136	258	30.50	34.00	32.25
B_j	347	383						
B_j/IR	28.92	31.92	Valores Globales: T = 730 T/IJR = 30,42					

Tabla 6.10: Respuestas y cálculos parciales del Ejemplo 6.2

La tabla de análisis de varianza, cuyos cálculos detallados no se incluyen, es la siguiente:

Fuente de Variación	Suma de Cuadrados	Grados de Libertad	Cuadrados Medios	Cuociente F
Factor A	112.6	2	56.3	5.57
Factor B	54.0	1	54.0	5.35
Interacción AB	0.8	2	0.4	0.04
Residuo	182.5	18	10.1	-
Total	349.8	23	-	-

Tabla 6.11: Tabla de Análisis de Varianza del Ejemplo 6.2

Los valores obtenidos de la tabla F, del Apéndice, para los correspondientes grados de libertad, son:

F(2, 18) = 3,55 para A y para AB
F(l, 18) = 4,41 para B

En consecuencia, comparando los valores de tabla con los cuocientes F calculados, concluimos que hay efectos significativos del factor A, la marca del filtro, y hay efecto significativo debido al factor B y no a la interacción entre ambos factores.

Hasta el momento hemos presentado las expresiones para realizar análisis ANOVA de uno o dos factores. De forma similar, se pueden desarrollar expresiones para efectuar ANOVA de tres o más factores. Sin embargo, dichas expresiones se tornan rápidamente poco adecuadas para realizar los cálculos correspondientes en forma manual. Por ello, la gran mayoría de los softwares de análisis estadístico de datos incluyen herramientas para efectuar ANOVA. Por ejemplo, la planilla de cálculo Excel trae en su herramienta de "Ánalisis de datos", la capacidad de efectuar ANOVA de uno o dos factores. Otros software más avanzados como SPSS pueden efectuar ANOVA de múltiples factores sin mayores limitaciones.

<u>ESTUDIO DE CASO</u>: PROCESO DE EXTRACCIÓN DE COBRE DE LA LIXIVIACIÓN DE BATEAS.

Uno de los métodos de extracción de cobre, del mineral, es el método de lixiviación, que consiste en verter ácido sulfúrico sobre el mineral, depositado en grandes bateas, el que disuelve el contenido de cobre en él. El líquido escurre, y de él se recupera posteriormente el metal. Se piensa que hay tres factores importantes que pueden controlar el proceso, de modo de optimizar el contenido de cobre extraído. Estos factores son, la duración del ciclo de lixiviación, la masa del mineral depositado en las bateas, y la ley del mineral, es decir, su contenido de cobre. Para ello se diseñó el experimento descrito a continuación:

<u>OBJETIVO DEL EXPERIMENTO</u>*:* Optimizar el porcentaje de cobre extraído mediante el proceso de lixiviación.

<u>DISEÑO DEL EXPERIMENTO</u>*:* Tres factores, con dos niveles cada uno, según la siguiente descripción:

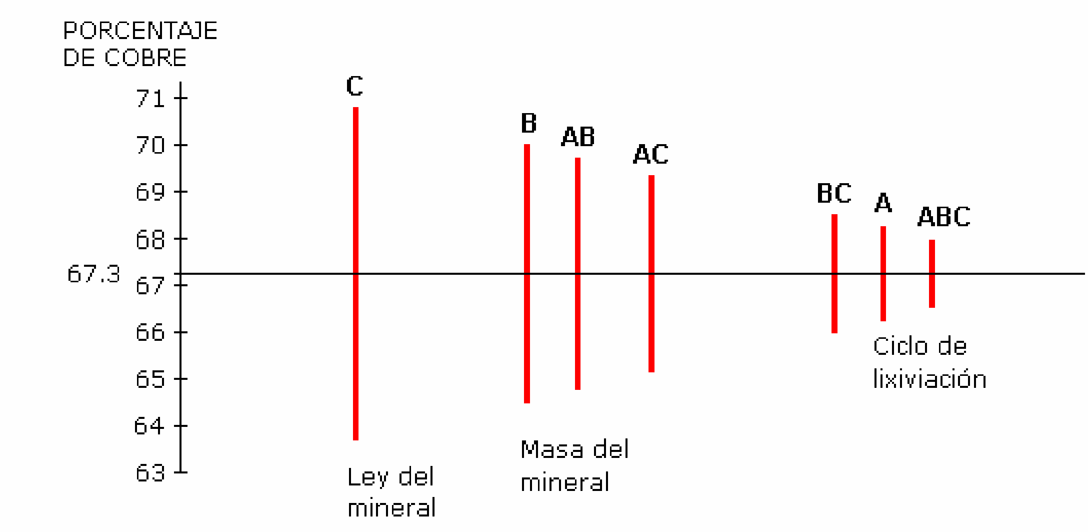
	FACTORES		NIVELES
A:	Ciclo de lixiviación	a_1 :	120 horas
		a_2 :	90 horas
B:	Masa del mineral por batea	b_1 :	11500 toneladas
		b_2 :	13500 toneladas
C*:*	Ley del mineral	c_1 :	1 % de cobre
		c_2 :	1.5 % de cobre

<u>RESPUESTA</u>*:* Porcentaje de cobre extraído del mineral.

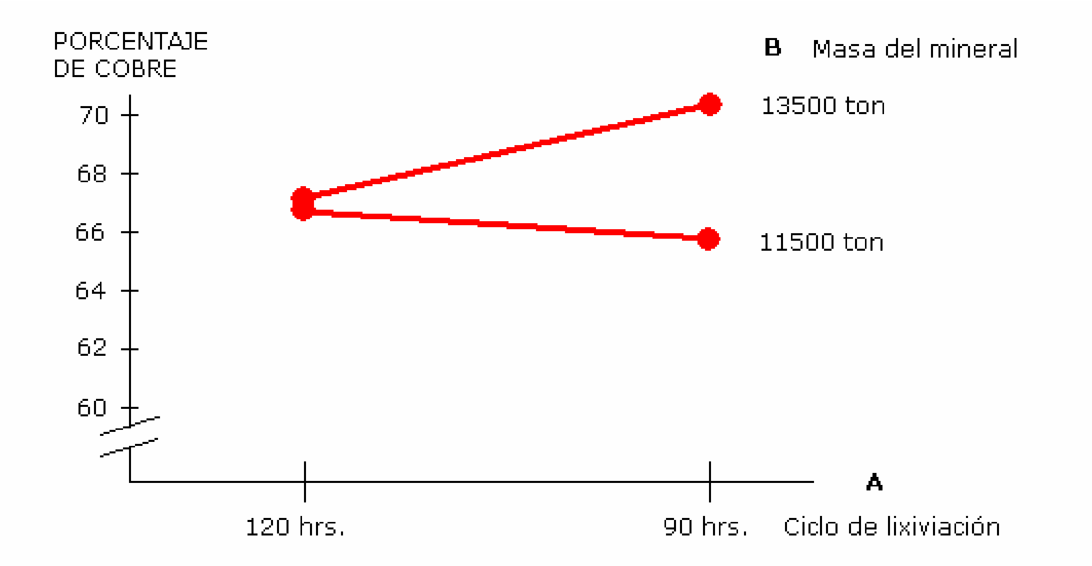
El experimento se hizo con tres corridas experimentales por cada combinación de tratamientos. Los resultados obtenidos fueron los siguientes:

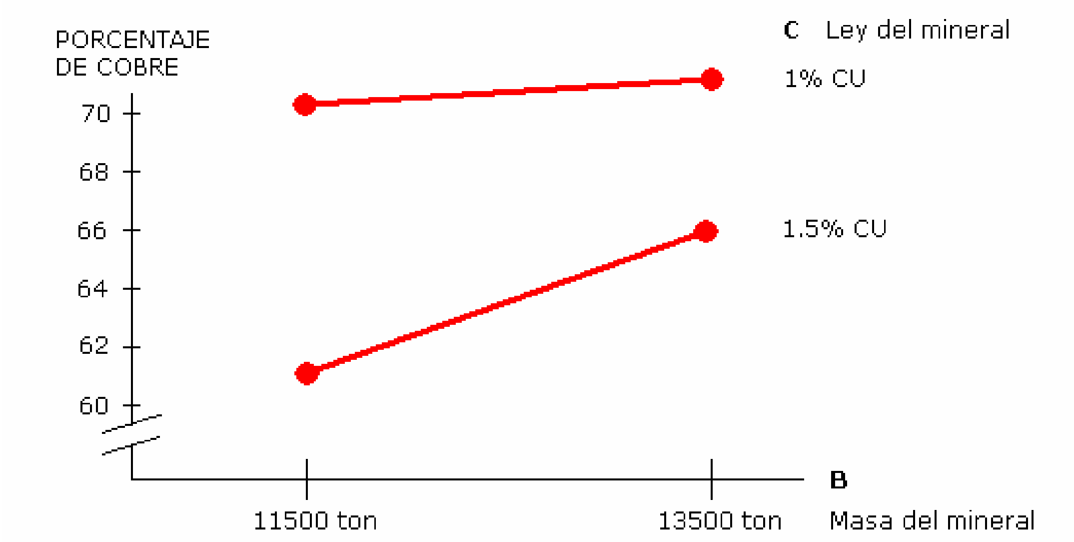
COMBINACION DE TRATAMIENTOS	RESPUESTAS Réplica 1	Réplica 2	Réplica 3	Promedio
$a_1b_1c_1$	64.1	63.9	61.6	63.2
$a_2b_1c_1$	59.1	62.1	59.7	60.3
$a_1b_2c_1$	66.9	68.4	61.2	65.5
$a_2b_2c_1$	66.8	67.6	64.2	66.2
$a_1b_1c_2$	70.6	69.7	70.3	70.2
$a_2b_1c_2$	72.3	68.9	69.1	70.1
$a_1b_2c_2$	67.6	67.8	69.8	68.4
$a_1b_2c_2$	74.9	74.2	75.0	74.7

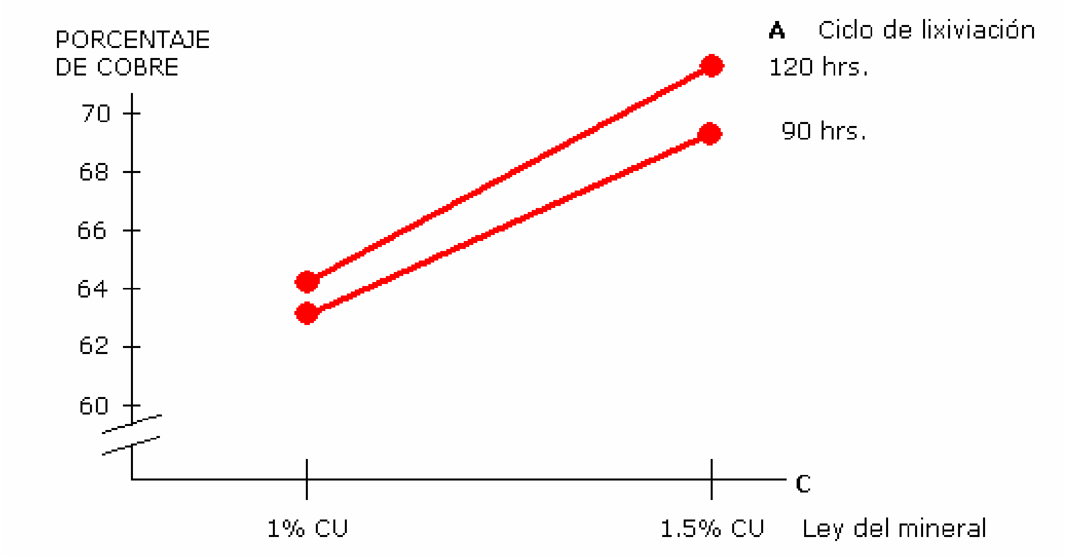
A continuación se muestra el diagrama de efectos y los gráficos de interacción. El diagrama de efectos muestra un fuerte efecto del factor C, igual a 7.1, la ley del mineral. Un efecto moderado del factor B, igual a 2.8, la masa del mineral, casi nada de efecto del factor A, 1.0, ciclo de lixiviación. Sin embargo, aparecen con un efecto moderado, las interacciones AB (2.5) y AC (2.1). La otra interacción doble, BC, es insignificante, (1.3), lo mismo que la interacción triple (0.7).



Los gráficos de interacción muestran lo mismo, un fuerte efecto del factor C, muy poco efecto de los demás factores y de la interacción.







La Tabla de Análisis de Varianza se presenta a continuación, y confirma los resultados anteriores. El valor de tabla, para decidir si los cuocientes F son o no significativos, es F(1,16)=4.49. Aparecen como significativos, el factor C, la ley del mineral, el factor B, la masa del mineral, la interacción AC, y la interacción AB, en ese orden de importancia.

FUENTE DE VARIACION	SUMA DE CUADRADOS	GRADOS DE LIBERTAD	CUADRADOS MEDIOS	CUOCIENTE F	SIGNIFICACION
FACTOR A	6.00	1	6.00	1.74	no signif.
FACTOR B	45.38	1	45.38	13.17	*
INTERACCION AB	35.50	1	35.50	86.56	*
FACTOR C	298.22	1	298.22	10.89	*
INTERACCION AC	26.46	1	26.46	7.68	*
INTERACCION BC	10.94	1	10.94	3.17	no signif.
INTERACCION ABC	2.94	1	2.94	0.85	no signif.
RESIDUO	55.12	16	3.45	--	--
TOTAL	482.55	23	--	--	--

Si se compara la tabla de análisis de varianza con el diagrama de efectos, se puede observar que son totalmente consistentes en cuanto al orden y magnitudes relativas de los efectos con los cuocientes F.

EJERCICIOS.

6.1) Verificar la equivalencia entre el modelo que expresa los efectos principales en interacciones en términos de las repuestas, en un experimento factoria! a tres factores, dado en el Capítulo 3, y en el modelo lineal (fUi), de la sección G.I, utilizando un procedimiento similar al presentado en esa sección de este capítulo.

6.2) Una industria desarrolla un nuevo tipo de jugo de mango, que se vende en forma de concentrado, en tarros de un litro. El departamento de Marketing desea probar qué color de envase resulta más atractivo para el consumidor. Se desarrolla un experimento para probar el efecto de tres colores, Rojo, Amarillo y Azul. Se registran las ventas de cada color en un supermercado, durante periodos de una semana, de cada uno de los tres colores. Se desarrolla el experimento con S réplicas. Las ventas semanales que se registraron fueron las siguientes:

REPLICA	ROJO	AMARILLO	AZUL
1	46	52	61
2	52	37	29
3	59	38	38
4	78	64	53
5	81	74	79

Construya una tabla de análisis de varianza para este experimento, y obtenga una conclusión respecto al efecto del color del tarro, sobre las ventas.

6.3) Se diseña un experimento para probar la resistencia de tres tipos de nylon para pescar, de O.3mm de espesor, a diferentes temperaturas. Los tipos de nylon son "Neptuno", "Lin-Lin", y "Standard". Las temperaturas a que fueron sometidas son 5ºC, 15ºC y 28ºC. Se hicieron cuatro réplicas de cada combinación de tratamientos.

Se sometió el material experimental a pruebas de resistencia, y se obtuvieron los siguientes resultados. El número de corridas experimentales es 3 x 3 x 4 = 36.

Construya una tabla de análisis de varianza para este experimento. Obtenga una conclusión respecto si hay diferencia entre las resistencias de los tipos de nylon, si hay efecto causado por la temperatura, y si hay interacción entre tipo de nylon y temperatura. Resultados experimentales:

	TIPO DE NYLON		
TEMPERATURA	NEPTUNO	LIN-LIN	ESTANDAR
5ºC	21	26	22
	24	43	36
	32	35	40
	28	40	35
15ºC	36	30	19
	42	20	37
	28	26	29
	30	24	23
28ºC	19	44	14
	21	38	23
	27	33	27
	18	18	22

APENDICE

TABLA DE DISTRIBUCION F

Nivel de significación 5%

PRIMERA PARTE

GRADOS DE LIBERTAD DEL NUMERADOR

GRADOS DE LIBERTAD DEL DENOMINADOR	1		3	4	5	6	7	8	9
1	161.40	199.50	215.70	224.60	230. 0	234.00	236.80	238.90	240.50
2	18.51	19.00	19.16	19.25	19.30	19.33	19.35	19.37	9.38
3	10.13	9.55	9.28	9.12	9.01	8.94	8.89	8.85	8.81
4	7.71	6.94	6.59	6.39	6.26	6.16	6.09	6.04	6.00
5	6.61	5.79	5.41	5.19	5.05	4.95	4.88	4.82	4.77
6	5.99	5.14	4.76	4.53	4.39	4.28	4.21	4.15	4.10
7	5.59	4.74	4.35	4.21	3.97	3.87	3.79	3.73	3.68
8	5.32	4.46	4.07	3.84	3.69	3.58	3.50	3.44	3.39
9	5.12	4.26	3.86	3.63	3.48	3.37	3.29	3.23	3.18
10	4.96	4.10	3.71	3.48	3.33	3.22	3.14	3.07	3.02
11	4.84	3.98	3.59	3.36	3.20	3.09	3.01	2.95	2.90
12	4.75	3.89	3.49	3.26	3.11	3.00	2.91	2.85	2.80
13	4.67	3.81	3.41	3.18	3.03	2.92	2.83	2.77	2.71
14	4.60	3.74	3.34	3.11	2.96	2.85	2.76	2.70	2.65
15	4.54	3.68	3.29	3.06	2.90	2.79	2.71	2.64	2.59
16	4.49	3.63	3.24	3.01	2.85	2.74	2.66	2.59	2.54
17	4.45	3.59	3.20	2.86	2.81	2.70	2.61	2.55	2.49
18	4.41	3.55	3.16	2.93	2.77	2.66	2.58	2.51	2.46
19	4.38	3.52	3.13	2.90	2.74	2.63	2.54	2.48	2.42
20	4.35	3.49	3.10	2.87	2.71	2.60	2.51	2.45	2.39
21	4.32	3.47	3.07	2.84	2.68	2.57	2.49	2.42	2.37
22	4.30	3.44	3.05	2.82	2.66	2.55	2.46	2.40	2.34
23	4.28	3.42	3.03	2.80	2.64	2.53	2.44	2.37	2.32
24	4.26	3.40	3.01	2.78	2.60	2.51	2.42	2.36	2.30
25	4.24	3.39	2.99	2.76	2.60	2.49	2.40	2.34	2.28
26	4.23	3.37	2.98	2.74	2.59	2.47	2.39	2.32	2.27
27	4.21	3.35	2.96	2.73	2.57	2.46	2.37	2.31	2.25
28	4.20	3.34	2.95	2.71	2.56	2.45	2.36	2.29	2.24
29	4.18	3.33	2.93	2.70	2.55	2.43	2.35	2.28	2.22
30	4.17	3.32	2.92	2.69	2.53	2.42	2.33	2.27	2.21
40	4.08	3.23	2.84	2.61	2.45	2.34	2.25	2.18	2.12
60	4.00	3.15	2.76	2.53	2.37	2.25	2.17	2.10	2.04
120	3.92	3.07	2.68	2.45	2.29	2.17	2.09	2.02	1.96
∞	3.84	3.00	2.60	2.37	2.21	2.10	2.01	1.94	1.88

TABLA DE DISTRIBUCION F

Nivel de significación 5%

SEGUNDA PARTE

GRADOS DE LIBERTAD DEL NUMERADOR

GRADOS DE LIDERTAD DEL DENOMINADOR	10	12	15	20	24	30	40	60	120
1	241.90	243.90	245.90	248.00	249.10	250.10	251.10	252.20.	253.30
2	19.40	19.41	19.43	19.45	19.45	19.46	19.47	19.48	19.49
3	8.79	8.74	8.70	8.66	8.64	8.62	8.59	8.57	8.55
4	5.96	5.91	5.86	5.80	5.77	5.75	5.72	5.69	5.66
5	4.74	4.68	4.62	4.56	4.53	4.50	4.46	4.43	4.40
6	4.06	4.00	3.94	3.87	3.84	3.81	3.77	3.74	3.70
7	3.64	9.67	3.51	3.44	3.41	3.38	3.34	3.30	3.27
8	3.35	3.28	3.22	3.15	3.12	3.08	3.04	3.01	2.97
9	3.14	3.07	3.01	2.94	2.90	2.86	2.83	2.79	2.75
10	2.98	2.91	2.85	2.77	2.74	2.70	2 66	2.62	2.58
11	2.85	2.79	2.72	2.65	2.61	2.57	2.53	2.49	2.45
12	2.75	2.69	2.62	2.54	2.51	2.47	2.43	2.38	2.34
13	2.67	2.60	2.53	2.46	2.42	2.38	2.34	2.30	2.25
14	2.60	2.53	2.46	2.39	2.35	2.31	2.27	2.18	2.18
15	2.54	2.48	2.40	2.93	2.29	2.25	2.20	2.16	2.11
16	2.49	2.42	2.95	2.28	2.24	2.19	2.15	2.11	2.06
17	2.45	2.38	2.31	2.23	2.19	2.15	2.10	2.06	2.01
18	2.41	2.34	2.27	2.19	2.15	2.11	2.06	2.02	1.97
19	2.38	2.31	2.29	2.16	2.11	2.07	2.03	1.98	1.93
20	2.95	2.28	2.20	2.01	2.08	2.04	1.99	1.95	1.90
21	2.32	2.25	2.18	2.10	2.05	2.01	1.96	1.92	1.87
22	2.90	2.23	2.15	2.07	2.03	1.98	1.94	1.89	1.84
23	2.27	2.20	2.13	2.05	2.01	1.96	1.91	1.86	1.81
24	2.25	2.18	2.11	2.03	1.98	1.94	1.89	1.84	1.79
25	2.24	2.16	2.09	2.01	1.96	1.92	1.87	1.82	1.77
26	2.22	2.15	2.07	1.99	1.95	1.90	1.85	1.80	1.75
27	2.20	2.13	2.06	1.97	1.93	1.88	1.84	1.79	1.73
28	2.19	2.12	2.04	1.96	1.91	1.87	1.82	1.77	1.71
29	2.18	2.10	2.03	1.94	1.90	1.85	1.81	1.75	1.70
30	2.16	2.09	2.01	1.93	1.89	1.84	1.79	1.74	1.68
40	2.08	2.00	1.92	1.84	1.79	1.74	1.69	1.64	1.58
60	1.99	1.92	1.84	1.75	1.70	1.65	1.59	1.53	1.47
120	1.91	1.89	1.75	1.66	1.61	1.55	1.50	1.43	1.35
∞	1.83	1.75	1.67	1.57	1.52	1.46	1.39	1.32	1.22