FORMULARIO CADENAS DE MARKOV

Fuente: F. Hillier - G. Lieberman: Introducción a la investigación de operaciones. Sexta edición. Ed. Mc-Graw Hill.

Proceso estocástico.

Un proceso estocástico es una colección indexada de variables aleatorias X_t, t con valores en algún conjunto T. En adelante $T = 1, 2, ...$, el conjunto de los números naturales. Consideraremos variables aleatorias X_t que tienen soporte discreto común para todas.

Estados del proceso estocástico.

Los valores que pueden asumir las variables aleatorias X_t los etiquetaremos $0, 1, 2, ..., M$, y se denominan estados del proceso estocástico.

Propiedad de Markov.

Un proceso estocástico $\{X_{(t)}\}$ tiene la propiedad de Markov si

$$Prob\{X_{t+1} = j \quad | \quad X_0 = k_0, X_1 = k_1, ..., X_{t-1} = k_{t-1}, X_t = i\} = Prob\{X_{t+1} = j \quad | \quad X_t = i\}$$

Es decir, la probabilidad condicional de un evento futuro dado el evento actual, es independiente de los eventos pasados.

Probabilidades de transición.

Las probabilidades condicionales del cambio del estado i al estado j en un paso o unidad de tiempo $Prob\{X_{t+1} = j \quad | \quad X_t = i\}$ se denominan probabilidades de transición.

Probabilidades de transición estacionarias.

Las probabilidades de transición son estacionarias (de un paso) si cumplen la propiedad

$$Prob\{X_{t+1} = j \quad | \quad X_t = i\} = Prob\{X_1 = j \quad | \quad X_0 = i\} \text{ para todo } t$$

En tal caso se denotan p_{ij}.

Propiedad: Si las probabilidades de transición (de un paso) son estacionarias, entonces se cumple que

$$Prob\{X_{t+n} = j \quad | \quad X_t = i\} = Prob\{X_n = j \quad | \quad X_0 = i\} \qquad \text{para todo } t$$

Estas probabilidades de transición se denominan probabilidades de transición de n pasos y se denotan $p_{ij}^{(n)}$. Observar que $p_{ij}^{(1)} = p_{ij}$.

Propiedad:

$$p_{ij}^{(0)} = \begin{cases} 1 & \text{si} \quad j = i \\ 0 & \text{si} \quad j \neq i \end{cases}$$

Cadena de Markov.

Un proceso estocástico que cumple con la propiedad markoviana se denomina cadena de markov.

En adelante se considerarán sólo cadenas de Markov estacionarias.

Matriz de transición de un paso.

Si p_{ij} es la probabilidad de transición del estado i al estado j, $(0 \leq i, j \leq M)$, entonces

$$P = \begin{bmatrix} p_{00} & p_{01} & \cdots & p_{0M} \\ p_{10} & p_{11} & \cdots & p_{1M} \\ . & . & \cdots & . \\ p_{M0} & p_{M1} & \cdots & p_{MM} \end{bmatrix}.$$

se denomina matriz de transición, o matriz de probabilidades de transición de un paso.

Propiedad: Observar que las filas de la matriz de transición suman uno.

$$\sum_{j=0}^{M} p_{ij} = 1$$

Matriz de transición de n pasos.

De forma análoga, si $p_{ij}^{(n)}$ es la probabilidad de transición del estado i al estado j en n pasos, $(0 \leq i, j \leq M)$, entonces la matriz $P^{(n)}$ que contiene todos estos valores se denomina matriz de transición de n pasos.

Propiedad: La matriz de transición de n pasos $P^{(n)}$ se puede obtener multiplicando la matriz de transición de un paso P, n veces:

$$P^{(n)} = P \cdot P \cdot P \cdot \ldots \cdot P = P^n$$

En general,

$$P^{(n)} = P^{(m)} \cdot P^{(n-m)}$$

para $0 \leq m \leq n$.

Si se toman los elementos (i,j) de esta última igualdad, se tienen la ecuaciones de Chapman-Kolmogorov

$$p_{ij}^{(n)} = \sum_{k=0}^{M} p_{ik}^{(m)} \cdot p_{kj}^{(n-m)}$$

para todo i, j, n, y $0 \leq m \leq n$.

Probabilidades incondicionales.

Para conocer las probabilidades incondicionales de alcanzar un estado j, en n pasos, es necesario conocer las probabilidades marginales del estados inicial. Sean estas

$$Q_{X_0}(i) = Prob\{X_0 = i\} \qquad\qquad i = 0, 1, 2, ..., M$$

Entonces

$$Prob\{X_n = j\} = \sum_{i=0}^{M} Q_{X_0}(i) p_{ij}^{(n)}$$

Si se define el vector

$$\underline{q}^{(m)} = \begin{bmatrix} Q_{X_m}(0) \\ Q_{X_m}(1) \\ . \\ . \\ . \\ Q_{X_m(M)} \end{bmatrix}$$

entonces la igualdad anterior se puede expresar en forma vectorial,

$$\underline{q}^{(n)} = \underline{q}^{(0)} P^{(n)}$$

Estados accesibles.

Un estado j de una cadena de Markov es accesible desde un estado i si $p_{ij}^{(n)} > 0$ para algún $n > 0$.

Estados que se comunican.

Si el estado j es accesible desde el estado i, y el estado i es accesible desde el estado j, entonces estos dos estados se comunican.

Propiedades:

1) Todo estado se comunica consigo mismo (reflexividad).

2) Si i se comunica con j, entonces j se comunica con i (simetría).

3) Si i se comunica con j y j se comunica con k, entonces i se comunica con k (transitividad).

Las tres propiedades anteriores indican que la relación ¨comunicarse¨es una relación de equivalencia en el conjunto de todos los estados de una cadena de Markov. Por lo tanto define una partición en este conjunto, en que cada clase contiene los estados que se comunican entre si. Si dos estados no se comunican, están en clases diferentes.

Cadena de Markov irreductible.

Si existe una sola clase, es decir, si todos los estados se comunican, entonces la cadena de Markov es irreductible. En tal caso cada estado puede ser alcanzado por todos los demás.

Conjunto cerrado de estados.

Sea C un conjunto de estados. C es cerrado si cuando el sistema cae en uno de los estados de C, permanece para siempre en algún estado de C.

Estado absorbente.

Un estado i es absorbente, si p_{ii} es 1. Es decir, si cuando el sistema cae en el estado i, no vuelve a salir de él. Es un caso especial de conjunto cerrado, en que el conjunto contiene sólo el estado i.

Primer retorno.

El primer retorno al estado j consiste en que el sistema está en el estado j y después de uno o más pasos vuelve al mismo estado.

Propiedad: Sea $f_{jj}^{(n)}$ la probabilidad de que el primer retorno al estado j se produzca en el paso n-ésimo.
Sea f_{jj} la probabilidad que alguna vez el sistema retorne al estado j.

Entonces

$$f_{jj} = \sum_{n=1}^{\infty} f_{jj}^{(n)}$$

Tiempo medio de retorno o de recurrencia.

Es el tiempo esperado μ_{jj} hasta el primer retorno al estado j, y está dado por

$$\mu_{jj} = \begin{cases} \sum_{n=1}^{\infty} n f_{jj}^{(n)} & si \quad f_{jj} = \sum_{n=1}^{\infty} f_{jj}^{(n)} = 1 \\ \\ \infty & si \quad f_{jj} = \sum_{n=1}^{\infty} f_{jj}^{(n)} < 1 \end{cases}$$

Estado nulo.

Un estado j es nulo si $\mu_{jj} = \infty$. Es no nulo si $\mu_{jj} < \infty$.

Estado periódico.

Un estado j es periódico con período t si es posible un retorno sólo en los pasos $t, 2t, 3t, ...$
Esto significa que $f_{jj}^{(n)} = 0$ siempre que n no sea divisible por t.

Estado recurrente.

Un estado j es recurrente si $f_{jj} = 1$.

Cadena de Markov ergódica.

Una cadena de Markov es ergódica si todos sus estados son no nulos, no periódicos y recurrentes.

Propiedad: Las cadenas de Markov ergódicas cumplen la siguiente propiedad: El límite $\lim_{n\to 0} p_{ij}^{(n)}$ existe y es independiente del estado inicial i. Lo denominaremos π_j:

$$\pi_j = \lim_{n\to\infty} p_{ij}^{(n)}$$

Las probabilidades límites π_j se denominan probabilidades de estado estable.

Propiedad: Si los límites anteriores existen, entonces

$$\lim_{n\to\infty} \left(\frac{1}{n} \sum_{k=1}^{n} p_{ij}^{(k)} \right) = \pi_j$$

Ecuaciones de estado estable.

Las probabilidades de estado estable π_j satisfacen las ecuaciones de estado estable

$$\pi_j = \sum_{i=0}^{M} \pi_i p_{ij}$$

donde

$$\sum_{i=0}^{M} \pi_i = 1$$

Son, en total, M+2 ecuaciones con M+1 incógnitas. Una de las primeras M+1 ecuaciones depende de las otras.

Propiedad: Las probabilidades de estado estable se relacionan con los tiempos medios de retorno de la siguiente manera:

$$\pi_j = \frac{1}{\mu_{jj}}$$

Tiempo medio de primera pasada.

Es el tiempo esperado μ_{ij} hasta que el sistema llega al estado j, desde el estado i.

El tiempo medio de retorno es un caso especial del tiempo medio de primera pasada, en que $i = j$.

Sea $f_{ij}^{(n)}$ la probabilidad de que la primera llegada del sistema al estado j desde el estrado i, se produzca en el paso n-ésimo. Sea f_{ij} la probabilidad de que el sistema llegue alguna vez a j, partiendo de i.

El tiempo medio de primera pasada está dado por

$$\mu_{ij} = \begin{cases} \sum_{n=1}^{\infty} n f_{ij}^{(n)} & si \quad f_{ij} = \sum_{n=1}^{\infty} f_{ij}^{(n)} = 1 \\ \\ \infty & si \quad f_{ij} = \sum_{n=1}^{\infty} f_{ij}^{(n)} < 1 \end{cases}$$

Si $\quad f_{ij} = \sum_{n=1}^{\infty} f_{ij}^{(n)} = 1$, es decir, si el sistema va a llegar a j, desde i, con probabilidad 1, entonces se cumple la relación

$$\mu_{ij} = 1 + \sum_{k=0, k\neq j}^{M} p_{ik}\mu_{kj}$$

Costo promedio por unidad de tiempo.

Sea $C(X_t)$ el costo, o pérdida, de que el sistema esté en el estado X_t, en el tiempo t. Se asume que es independiente de t, y por lo tanto puede tomar valores $C(0), C(1), ..., C(M)$

El costo promedio por unidad de tiempo, es el costo esperado

$$E\Big[\frac{1}{n}\sum_{t=1}^{\infty} C(X_t)\Big]$$

Propiedad

$$\lim_{n\to\infty} E\Big[\frac{1}{n}\sum_{t=1}^{\infty} C(X_t)\Big] = \sum_{j=0}^{M} \pi_j C(j)$$