FORMULARIO TEORIA DE FILAS

Proceso general de nacimiento y muerte.

Tasas de entrada: $\lambda_0, \lambda_1, ..., \lambda_{n-1}$ clientes por unidad de tiempo.

Tasas de salida: $\mu_1, \mu_2, ..., \mu_n$ clientes por unidad de tiempo. $n = 1, 2, ...$

Razón entrada/salida: $C_0 = 1$ $C_n = \frac{\lambda_0 \cdot \lambda_1 \cdot ... \cdot \lambda_{n-1}}{\mu_1 \cdot \mu_2 \cdot ... \cdot \mu_n}$

Probabilidades de estado estable.

Probabilidad de que no haya clientes en el sistema:

$$p_0 = \left[\sum_{k=0}^{\infty} C_k \right]^{-1}$$

Probabilidad de que haya n clientes en el sistema (n=0,1,2...):

$$p_n = C_n \cdot p_0$$

Número medio de clientes.

En fila: $L_f = \sum_{k=s}^{\infty} (k - s) \cdot p_k$

En servicio: $L_s = L - L_f = \sum_{k=0}^{s-1} k \cdot p_k + s \cdot \sum_{k=s}^{\infty} p_k$

En el sistema: $L = L_s + L_f = \sum_{k=0}^{\infty} k \cdot p_k$

Tiempos medios de espera.

En fila: $W_f = \frac{L_f}{\lambda_e}$

En servicio: $W_s = \frac{L_s}{\lambda_e}$

En el sistema: $W = \frac{L}{\lambda_e}$

Donde $\lambda_e = \sum_{k=0}^{\infty} \lambda_k \cdot p_k$ es la *tasa efectiva de llegada.*

Modelo de Filas de espera M/M/1

Tiempos entre llegadas y de servicio exponenciales, 1 servidor.

Factor de utilización: $\rho = (\lambda/\mu)$

Probabilidades de estado estable. $(\rho < 1)$

Probabilidad de que no haya clientes en el sistema:

$$p_0 = 1 - \rho$$

Probabilidad de que haya n clientes en el sistema (n=0,1,2,...):

$$p_n = (1 - \rho) \cdot \rho^n$$

Número medio de clientes.

En fila: $L_f = \frac{\rho^2}{1-\rho}$

En servicio: $L_s = \rho$

En el sistema: $L = \frac{\rho}{1-\rho}$

Tiempos medios de espera.

En fila: $W_f = \frac{\lambda}{\mu(\mu-\lambda)}$

En servicio: $W_s = \frac{1}{\mu}$

En el sistema: $W = \frac{1}{\mu-\lambda}$

Probabilidades de tiempos de espera.

En fila: $Prob(w_f = 0) = 1 - \rho$

$$Prob(w_f > t) = \rho \cdot exp[-(\mu - \lambda) \cdot t)] \qquad \text{si } t > 0$$

En el sistema: $Prob(w > t) = exp[-(\mu - \lambda) \cdot t)]$ si $t > 0$

Modelo M/M/s, $s > 1$

Tiempos entre llegadas y de servicio exponenciales, s servidores.

Tasa de llegada: λ clientes por unidad de tiempo.

Tasa de servicio: μ clientes por unidad de tiempo.

Factor de utilización: $\rho = \frac{\lambda}{s \cdot \mu}$
($\rho < 1$)

Probabilidades de estado estable.

Probabilidad de que no haya clientes en el sistema:

$$p_0 = \left[\sum_{k=0}^{s-1} \frac{(\lambda/\mu)^k}{k!} + \frac{(\lambda/\mu)^s}{s!(1-\rho)} \right]^{-1}$$

Probabilidad de que haya n clientes en el sistema (n=0,1,2,...):

$$p_n = \begin{cases} \frac{(\lambda/\mu)^n}{n!} p_0 & si 0 < n < s \\ \frac{(\lambda/\mu)^n}{s! s^{n-s}} p_0 & si n \geq s \end{cases}$$

Número medio de clientes.

En fila: $L_f = \frac{(\lambda/\mu)^s \rho}{s!(1-\rho)^2} p_0$

En servicio: $L_s = (\lambda/\mu)$

En el sistema: $L = L_f + L_s$

Tiempos medios de espera.

En fila: $W_f = \frac{L_f}{\lambda}$

En servicio: $W_s = \frac{1}{\mu}$

En el sistema: $W = W_f + W_s$

Probabilidades de tiempos de espera.

En fila: $Prob(w_f = 0) = \sum_{k=0}^{s-1} p_k$

$$Prob(w_f > t) = exp[-(s\mu - \lambda)t][1 - Prob(w_f = 0)] \qquad \text{si } t > 0$$

En el sistema:

$$Prob(w > t) = exp[-(\mu t)] \left[1 + \frac{(\lambda/\mu)^s}{s!(1-\rho)} \frac{1 - exp[-\mu(s - 1 - (\lambda/\mu))t]}{s - 1 - (\lambda/\mu)} p_0 \right] \qquad \text{si } t > 0$$

Modelo (M/M/1):(G/Q/∞).

Tiempos entre llegadas y de servicio exponenciales, 1 servidor, número máximo de clientes en el sistema Q.

Factor de utilización: $\rho = \lambda/\mu$

Caso $\rho \neq 1$.

Probabilidades de estado estable.

Probabilidad de que no haya clientes en el sistema:

$$p_0 = \frac{1-\rho}{1-\rho^{Q+1}}$$

Probabilidad de que haya n clientes en el sistema (n=0,1,2,...):

$$p_n = \begin{cases} \frac{1-\rho}{1-\rho^{Q+1}} \cdot \rho^n & \text{si } 0 \leq n \leq Q \\ 0 & \text{si } n > Q \end{cases}$$

Número medio de clientes.

En fila: $L_f = L - (1-p_0) = \frac{1-Q\rho^{Q-1}+(Q-1)\rho^Q}{(1-\rho)(1-\rho^{Q+1})}\rho^2$

En servicio: $L_s = 1 - p_0 = \rho(1-p_Q) = \rho \cdot \frac{1-\rho^Q}{1-\rho^{Q+1}}$

En el sistema: $L = \frac{\rho}{1-\rho} - \frac{(Q+1)\rho^{Q+1}}{1-\rho^{Q+1}} = \frac{1-(Q+1)\rho^Q+Q\rho^{Q+1}}{(1-\rho)(1-\rho^{Q+1})}\rho$

Tiempos medios de espera.

En fila: $W_f = \frac{L_f}{\lambda_e} = \frac{L_f}{\lambda(1-p_Q)} = \frac{L_f}{\mu(1-p_0)}$

En servicio: $W_s = \frac{1}{\mu}$

En el sistema: $W = \frac{L}{\lambda_e} = \frac{L}{\lambda(1-p_Q)}$

Donde $\lambda_e = \lambda(1-p_Q) = \mu(1-p_0) = \lambda\frac{1-\rho^Q}{1-\rho^{Q+1}}$ es la *tasa efectiva de llegada.*

Modelo (M/M/1):(G/Q/∞) Caso $\rho = 1$.

Probabilidades de estado estable.

Probabilidad de que haya n clientes en el sistema (n=0,1,2,...):

$$p_n = \begin{cases} \frac{1}{Q+1} & \text{si } 0 \leq n \leq Q \\ 0 & \text{si } n > Q \end{cases}$$

Número medio de clientes.

En fila: $L_f = \frac{Q(Q-1)}{2(Q+1)}$

En servicio: $L_s = \frac{Q}{Q+1}$

En el sistema: $L = \frac{Q}{2}$

Tiempos medios de espera.

En fila: $W_f = \frac{L_f}{\lambda_e} = \frac{Q-1}{2\lambda}$

En servicio: $W_s = \frac{1}{\mu}$

En el sistema: $W = \frac{L}{\lambda_e} = \frac{Q+1}{2\lambda}$

Tasa efectiva de llegada: $\lambda_e = \frac{\lambda Q}{Q+1}$

Modelo (M/M/s):(G/Q/∞), $1 < s \leq Q$.

Tiempos entre llegadas y de servicio exponenciales, s servidores, número máximo de clientes en el sistema Q.

Factor de utilización: $\rho = \frac{\lambda}{s\mu}$

Caso $\rho \neq 1$.

Probabilidades de estado estable.

Probabilidad de que no haya clientes en el sistema:

$$p_0 = \left[\sum_{k=0}^{s} \frac{(\lambda/\mu)^k}{k!} + \frac{(\lambda/\mu)^s}{s!} \sum_{k=s+1}^{Q} \rho^{k-s}\right]^{-1} = \left[\sum_{k=0}^{s-1} \frac{(\lambda/\mu)^k}{k!} + (\lambda/\mu)^s \frac{1-\rho^{Q-s+1}}{s!(1-\rho)}\right]^{-1}$$

Probabilidad de que haya n clientes en el sistema (n=0,1,2,...):

$$p_n = \begin{cases} \frac{(\lambda/\mu)^n}{n!} p_0 & \text{si } n = 1, 2, ..., s \\ \frac{(\lambda/\mu)^n}{s! s^{n-s}} p_0 & \text{si } n = s+1, s+2, ...Q \\ 0 & \text{si } n > Q \end{cases}$$

Número medio de clientes.

En fila: $L_f = \frac{(\lambda/\mu)^s \rho}{s!(1-\rho)^2} \left[1 - \rho^{Q-s} - (Q-s)\rho^{Q-s}(1-\rho)\right] p_0$

En servicio: $L_s = \sum_{k=0}^{s-1} k p_k + s\left[1 - \sum_{k=0}^{s-1} p_k\right]$

En el sistema: $L = L_f + L_s$

Tiempos medios de espera.

En fila: $W_f = \frac{L_f}{\lambda_e}$

En servicio: $W_s = \frac{1}{\mu}$

En el sistema: $W = \frac{L}{\lambda_e}$

Tasa efectiva de llegada: $\lambda_e = \lambda(1 - p_Q)$.

Modelo (M/M/s):(G/Q/∞), $1 < s \leq Q$. Caso $\rho = 1$.

Probabilidades de estado estable.

Probabilidad de que no haya clientes en el sistema:

$$p_0 = \left[\sum_{k=0}^{s-1} \frac{(\lambda/\mu)^k}{k!} + \frac{(\lambda/\mu)^s}{s!}(Q - s + 1) \right]^{-1}$$

Probabilidad de que haya n clientes en el sistema (n=0,1,2,...):

$$p_n = \begin{cases} \frac{(\lambda/\mu)^n}{n!} p_0 & \text{si } n = 1, 2, ..., s \\ \frac{(\lambda/\mu)^n}{s! s^{n-s}} p_0 & \text{si } n = s+1, s+2, ...Q \\ 0 & \text{si } n > Q \end{cases}$$

Número medio de clientes.

En fila: $L_f = \frac{(\lambda/\mu)^s (Q-s)(Q-s+1)}{2s!} p_0$

En servicio: $L_s = \frac{\lambda_e}{\mu} = (\lambda/\mu)(1 - p_0)$

En el sistema: $L = L_f + L_s = L_f + (\lambda/\mu)(1 - p_0)$

Tiempos medios de espera.

En fila: $W_f = \frac{L_f}{\lambda_e}$

En servicio: $W_s = \frac{1}{\mu}$

En el sistema: $W = \frac{L}{\lambda_e}$
Tasa efectiva de llegada: $\lambda_e = \lambda(1 - p_Q)$

Modelo (M/M/1):(G/∞/M).

Tiempos entre llegadas y de servicio exponenciales, 1 servidor, capacidad de fila infinita, población de clientes finita tamaño M.

Factor de utilización: $\rho = (\lambda/\mu)$

Probabilidades de estado estable. ($\rho < 1$)

Probabilidad de que no haya clientes en el sistema:

$$p_0 = \left[\sum_{k=0}^{M} \begin{pmatrix} \mathrm{M} \\ \mathrm{k} \end{pmatrix} k!(\lambda/\mu)^k \right]^{-1}$$

Probabilidad de que haya n clientes en el sistema (n=0,1,2,...):

$$p_n = \begin{cases} \begin{pmatrix} \mathrm{M} \\ \mathrm{n} \end{pmatrix} n!(\lambda/\mu)^n p_0 & \text{si } 0 \leq n < M \\ 0 & \text{si } n > M \end{cases}$$

Número medio de clientes.

En fila: $L_f = M - \left(1 + \frac{\mu}{\lambda}\right)(1 - p_0)$

En servicio: $L_s = 1 - p_0$

En el sistema: $L = L_f + 1 - p_0 = M - \frac{\mu}{\lambda}(1 - p_0)$

Tiempos medios de espera.

En fila: $W_f = \frac{L_f}{\lambda_e} = \frac{L_f}{\lambda(M-L)} = \frac{L_f}{\mu(1-p_0)}$

En servicio: $W_s = \frac{L_s}{\lambda_e} = \frac{1-p_0}{\lambda(M-L)} = \frac{1}{\mu}$

En el sistema: $W = \frac{L}{\lambda_e} = \frac{L}{\lambda(M-L)} = \frac{L}{\mu(1-p_0)}$

Tasa efectiva de llegada: $\lambda_e = \lambda(M - L) = \mu(L - L_f) = \mu(1 - p_0)$

Modelo (M/M/s):(G/∞/M), $s > 1$.

Tiempos entre llegadas y de servicio exponenciales, s servidores, capacidad de fila infinita, población de clientes finita tamaño M.

Factor de utilización: $\rho = (\lambda/\mu)$ (puede tomar cualquier valor).

Probabilidades de estado estable.

Probabilidad de que no haya clientes en el sistema:

$$p_0 = \left[\sum_{k=0}^{s-1} \begin{pmatrix} \mathrm{M} \\ \mathrm{k} \end{pmatrix} (\lambda/\mu)^k + \sum_{k=s}^{M} \begin{pmatrix} \mathrm{M} \\ \mathrm{k} \end{pmatrix} \frac{k!}{s!s^{k-s}} (\lambda/\mu)^k \right]^{-1}$$

Probabilidad de que haya n clientes en el sistema (n=0,1,2,...):

$$p_n = \begin{cases} \begin{pmatrix} \mathrm{M} \\ \mathrm{n} \end{pmatrix} (\lambda/\mu)^n p_0 & \text{si } 0 \leq n < s \\ \begin{pmatrix} \mathrm{M} \\ \mathrm{n} \end{pmatrix} \frac{n!}{s!s^{n-s}} (\lambda/\mu)^n p_0 & \text{si } s \leq n \leq M \\ 0 & \text{si } n > M \end{cases}$$

Número medio de clientes.

En fila: $L_f = L - s + \left[\sum_{k=0}^{s-1} (s-k) \begin{pmatrix} \mathrm{M} \\ \mathrm{k} \end{pmatrix} (\lambda/\mu)^k \right] p_0$

En servicio: $L_s = L - L_f = s - \left[\sum_{k=0}^{s-1} (s-k) \begin{pmatrix} \mathrm{M} \\ \mathrm{k} \end{pmatrix} \left(\frac{\lambda}{\mu}\right)^k \right] p_0$

En el sistema: $L = \left[\sum_{k=0}^{s-1} k \begin{pmatrix} \mathrm{M} \\ \mathrm{k} \end{pmatrix} \left(\frac{\lambda}{\mu}\right)^k + \frac{1}{s!} \sum_{k=s}^{M} k \begin{pmatrix} \mathrm{M} \\ \mathrm{k} \end{pmatrix} \frac{k!}{s^{k-s}} \left(\frac{\lambda}{\mu}\right)^k \right] p_0$

Tiempos medios de espera.

En fila: $W_f = \frac{L_f}{\lambda_e} = \frac{L_f}{\lambda(M-L)}$

En servicio: $W_s = \frac{L_s}{\lambda_e} = \frac{L_s}{\lambda(M-L)} = \frac{1}{\mu}$

En el sistema: $W = \frac{L}{\lambda_e} = \frac{L}{\lambda(M-L)}$

Tasa efectiva de llegada: $\lambda_e = \lambda(M-L) = \mu(L - L_f)$.

Modelo (M/M/∞).

Autoservicio. Tiempos entre llegadas y de servicio exponenciales. Cada cliente es un servidor: El número de servidores es infinito.

Probabilidades de estado estable.

Probabilidad de que no haya clientes en el sistema:

$$p_0 = e^{-\lambda/\mu}$$

Probabilidad de que haya n clientes en el sistema (n=0,1,2,...):

$$p_n = \frac{e^{-\lambda/}\mu \cdot \lambda/\mu}{n!}$$

Número medio de clientes.

En fila: $L_f = 0$

En servicio: $L_s = \lambda/\mu$

En el sistema: $L = \lambda/\mu$

Tiempos medios de espera.

En fila: $W_f = 0$

En servicio: $W_s = \frac{1}{\mu}$

En el sistema: $W = \frac{1}{\mu}$