

# FORMULARIO TEORIA DE FILAS

## Proceso general de nacimiento y muerte.

Tasas de entrada:  $\lambda_0, \lambda_1, \dots, \lambda_{n-1}$  clientes por unidad de tiempo.

Tasas de salida:  $\mu_1, \mu_2, \dots, \mu_n$  clientes por unidad de tiempo.  $n = 1, 2, \dots$

Razón entrada/salida:  $C_0 = 1$   $C_n = \frac{\lambda_0 \cdot \lambda_1 \cdot \dots \cdot \lambda_{n-1}}{\mu_1 \cdot \mu_2 \cdot \dots \cdot \mu_n}$

## Probabilidades de estado estable.

Probabilidad de que no haya clientes en el sistema:

$$p_0 = \left[ \sum_{k=0}^{\infty} C_k \right]^{-1}$$

Probabilidad de que haya  $n$  clientes en el sistema ( $n=0,1,2,\dots$ ):

$$p_n = C_n \cdot p_0$$

## Número medio de clientes.

En fila:  $L_f = \sum_{k=s}^{\infty} (k - s) \cdot p_k$

En servicio:  $L_s = L - L_f = \sum_{k=0}^{s-1} k \cdot p_k + s \cdot \sum_{k=s}^{\infty} p_k$

En el sistema:  $L = L_s + L_f = \sum_{k=0}^{\infty} k \cdot p_k$

## Tiempos medios de espera.

En fila:  $W_f = \frac{L_f}{\lambda_e}$

En servicio:  $W_s = \frac{L_s}{\lambda_e}$

En el sistema:  $W = \frac{L}{\lambda_e}$

Donde  $\lambda_e = \sum_{k=0}^{\infty} \lambda_k \cdot p_k$  es la *tasa efectiva de llegada*.

## Modelo de Filas de espera M/M/1

### Tiempos entre llegadas y de servicio exponenciales, 1 servidor.

Factor de utilización:  $\rho = (\lambda/\mu)$

**Probabilidades de estado estable.** ( $\rho < 1$ )

Probabilidad de que no haya clientes en el sistema:

$$p_0 = 1 - \rho$$

Probabilidad de que haya  $n$  clientes en el sistema ( $n=0,1,2,\dots$ ):

$$p_n = (1 - \rho) \cdot \rho^n$$

**Número medio de clientes.**

En fila:  $L_f = \frac{\rho^2}{1-\rho}$

En servicio:  $L_s = \rho$

En el sistema:  $L = \frac{\rho}{1-\rho}$

**Tiempos medios de espera.**

En fila:  $W_f = \frac{\lambda}{\mu(\mu-\lambda)}$

En servicio:  $W_s = \frac{1}{\mu}$

En el sistema:  $W = \frac{1}{\mu-\lambda}$

## Probabilidades de tiempos de espera.

En fila:  $Prob(w_f = 0) = 1 - \rho$

$$Prob(w_f > t) = \rho \cdot \exp[-(\mu - \lambda) \cdot t] \quad \text{si } t > 0$$

En el sistema:  $Prob(w > t) = \exp[-(\mu - \lambda) \cdot t] \quad \text{si } t > 0$

## Modelo M/M/s, $s > 1$

### Tiempos entre llegadas y de servicio exponenciales, s servidores.

Tasa de llegada:  $\lambda$  clientes por unidad de tiempo.

Tasa de servicio:  $\mu$  clientes por unidad de tiempo.

Factor de utilización:  $\rho = \frac{\lambda}{s \cdot \mu}$   
( $\rho < 1$ )

## Probabilidades de estado estable.

Probabilidad de que no haya clientes en el sistema:

$$p_0 = \left[ \sum_{k=0}^{s-1} \frac{(\lambda/\mu)^k}{k!} + \frac{(\lambda/\mu)^s}{s!(1-\rho)} \right]^{-1}$$

Probabilidad de que haya  $n$  clientes en el sistema ( $n=0,1,2,\dots$ ):

$$p_n = \begin{cases} \frac{(\lambda/\mu)^n}{n!} p_0 & \text{si } 0 < n < s \\ \frac{(\lambda/\mu)^n}{s!s^{n-s}} p_0 & \text{si } n \geq s \end{cases}$$

### Número medio de clientes.

$$\text{En fila: } L_f = \frac{(\lambda/\mu)^s \rho}{s!(1-\rho)^2} p_0$$

$$\text{En servicio: } L_s = (\lambda/\mu)$$

$$\text{En el sistema: } L = L_f + L_s$$

### Tiempos medios de espera.

$$\text{En fila: } W_f = \frac{L_f}{\lambda}$$

$$\text{En servicio: } W_s = \frac{1}{\mu}$$

$$\text{En el sistema: } W = W_f + W_s$$

### Probabilidades de tiempos de espera.

$$\text{En fila: } Prob(w_f = 0) = \sum_{k=0}^{s-1} p_k$$

$$Prob(w_f > t) = \exp[-(s\mu - \lambda)t][1 - Prob(w_f = 0)] \quad \text{si } t > 0$$

En el sistema:

$$Prob(w > t) = \exp[-(\mu t)] \left[ 1 + \frac{(\lambda/\mu)^s}{s!(1-\rho)} \frac{1 - \exp[-\mu(s-1 - (\lambda/\mu))t]}{s-1 - (\lambda/\mu)} p_0 \right] \quad \text{si } t > 0$$

## Modelo (M/M/1):(G/Q/∞).

### Tiempos entre llegadas y de servicio exponenciales, 1 servidor, número máximo de clientes en el sistema Q.

Factor de utilización:  $\rho = \lambda/\mu$

Caso  $\rho \neq 1$ .

**Probabilidades de estado estable.**

Probabilidad de que no haya clientes en el sistema:

$$p_0 = \frac{1 - \rho}{1 - \rho^{Q+1}}$$

Probabilidad de que haya  $n$  clientes en el sistema ( $n=0,1,2,\dots$ ):

$$p_n = \begin{cases} \frac{1-\rho}{1-\rho^{Q+1}} \cdot \rho^n & \text{si } 0 \leq n \leq Q \\ 0 & \text{si } n > Q \end{cases}$$

**Número medio de clientes.**

En fila:  $L_f = L - (1 - p_0) = \frac{1-Q\rho^{Q-1}+(Q-1)\rho^Q}{(1-\rho)(1-\rho^{Q+1})} \rho^2$

En servicio:  $L_s = 1 - p_0 = \rho(1 - p_Q) = \rho \cdot \frac{1-\rho^Q}{1-\rho^{Q+1}}$

En el sistema:  $L = \frac{\rho}{1-\rho} - \frac{(Q+1)\rho^{Q+1}}{1-\rho^{Q+1}} = \frac{1-(Q+1)\rho^Q+Q\rho^{Q+1}}{(1-\rho)(1-\rho^{Q+1})} \rho$

**Tiempos medios de espera.**

En fila:  $W_f = \frac{L_f}{\lambda_e} = \frac{L_f}{\lambda(1-p_Q)} = \frac{L_f}{\mu(1-p_0)}$

En servicio:  $W_s = \frac{1}{\mu}$

En el sistema:  $W = \frac{L}{\lambda_e} = \frac{L}{\lambda(1-p_Q)}$

Donde  $\lambda_e = \lambda(1 - p_Q) = \mu(1 - p_0) = \lambda \frac{1-\rho^Q}{1-\rho^{Q+1}}$  es la *tasa efectiva de llegada*.

Modelo (M/M/1):(G/Q/∞) Caso  $\rho = 1$ .

**Probabilidades de estado estable.**

Probabilidad de que haya  $n$  clientes en el sistema ( $n=0,1,2,\dots$ ):

$$p_n = \begin{cases} \frac{1}{Q+1} & \text{si } 0 \leq n \leq Q \\ 0 & \text{si } n > Q \end{cases}$$

**Número medio de clientes.**

En fila:  $L_f = \frac{Q(Q-1)}{2(Q+1)}$

En servicio:  $L_s = \frac{Q}{Q+1}$

En el sistema:  $L = \frac{Q}{2}$

**Tiempos medios de espera.**

En fila:  $W_f = \frac{L_f}{\lambda_e} = \frac{Q-1}{2\lambda}$

En servicio:  $W_s = \frac{1}{\mu}$

En el sistema:  $W = \frac{L}{\lambda_e} = \frac{Q+1}{2\lambda}$

Tasa efectiva de llegada:  $\lambda_e = \frac{\lambda Q}{Q+1}$

Modelo (M/M/s):(G/Q/∞), 1 < s ≤ Q.

Tiempos entre llegadas y de servicio exponenciales, s servidores, número máximo de clientes en el sistema Q.

Factor de utilización:  $\rho = \frac{\lambda}{s\mu}$

Caso  $\rho \neq 1$ .

**Probabilidades de estado estable.**

Probabilidad de que no haya clientes en el sistema:

$$p_0 = \left[ \sum_{k=0}^s \frac{(\lambda/\mu)^k}{k!} + \frac{(\lambda/\mu)^s}{s!} \sum_{k=s+1}^Q \rho^{k-s} \right]^{-1} = \left[ \sum_{k=0}^{s-1} \frac{(\lambda/\mu)^k}{k!} + (\lambda/\mu)^s \frac{1 - \rho^{Q-s+1}}{s!(1-\rho)} \right]^{-1}$$

Probabilidad de que haya  $n$  clientes en el sistema ( $n=0,1,2,\dots$ ):

$$p_n = \begin{cases} \frac{(\lambda/\mu)^n}{n!} p_0 & \text{si } n = 1, 2, \dots, s \\ \frac{(\lambda/\mu)^n}{s!s^{n-s}} p_0 & \text{si } n = s + 1, s + 2, \dots, Q \\ 0 & \text{si } n > Q \end{cases}$$

**Número medio de clientes.**

En fila:  $L_f = \frac{(\lambda/\mu)^s \rho}{s!(1-\rho)^2} [1 - \rho^{Q-s} - (Q-s)\rho^{Q-s}(1-\rho)] p_0$

En servicio:  $L_s = \sum_{k=0}^{s-1} k p_k + s [1 - \sum_{k=0}^{s-1} p_k]$

En el sistema:  $L = L_f + L_s$

**Tiempos medios de espera.**

En fila:  $W_f = \frac{L_f}{\lambda_e}$

En servicio:  $W_s = \frac{1}{\mu}$

En el sistema:  $W = \frac{L}{\lambda_e}$

Tasa efectiva de llegada:  $\lambda_e = \lambda(1 - p_Q)$ .

**Modelo (M/M/s):(G/Q/∞), 1 < s ≤ Q. Caso ρ = 1.**

**Probabilidades de estado estable.**

Probabilidad de que no haya clientes en el sistema:

$$p_0 = \left[ \sum_{k=0}^{s-1} \frac{(\lambda/\mu)^k}{k!} + \frac{(\lambda/\mu)^s}{s!} (Q - s + 1) \right]^{-1}$$

Probabilidad de que haya  $n$  clientes en el sistema ( $n=0,1,2,\dots$ ):

$$p_n = \begin{cases} \frac{(\lambda/\mu)^n}{n!} p_0 & \text{si } n = 1, 2, \dots, s \\ \frac{(\lambda/\mu)^n}{s! s^{n-s}} p_0 & \text{si } n = s + 1, s + 2, \dots, Q \\ 0 & \text{si } n > Q \end{cases}$$

**Número medio de clientes.**

En fila:  $L_f = \frac{(\lambda/\mu)^s (Q-s)(Q-s+1)}{2s!} p_0$

En servicio:  $L_s = \frac{\lambda_e}{\mu} = (\lambda/\mu)(1 - p_0)$

En el sistema:  $L = L_f + L_s = L_f + (\lambda/\mu)(1 - p_0)$

**Tiempos medios de espera.**

En fila:  $W_f = \frac{L_f}{\lambda_e}$

En servicio:  $W_s = \frac{1}{\mu}$

En el sistema:  $W = \frac{L}{\lambda_e}$

Tasa efectiva de llegada:  $\lambda_e = \lambda(1 - p_Q)$

## Modelo (M/M/1):(G/∞/M).

### Tiempos entre llegadas y de servicio exponenciales, 1 servidor, capacidad de fila infinita, población de clientes finita tamaño M.

Factor de utilización:  $\rho = (\lambda/\mu)$

**Probabilidades de estado estable.** ( $\rho < 1$ )

Probabilidad de que no haya clientes en el sistema:

$$p_0 = \left[ \sum_{k=0}^M \binom{M}{k} k! (\lambda/\mu)^k \right]^{-1}$$

Probabilidad de que haya  $n$  clientes en el sistema ( $n=0,1,2,\dots$ ):

$$p_n = \begin{cases} \binom{M}{n} n! (\lambda/\mu)^n p_0 & \text{si } 0 \leq n < M \\ 0 & \text{si } n > M \end{cases}$$

**Número medio de clientes.**

En fila:  $L_f = M - \left(1 + \frac{\mu}{\lambda}\right) (1 - p_0)$

En servicio:  $L_s = 1 - p_0$

En el sistema:  $L = L_f + 1 - p_0 = M - \frac{\mu}{\lambda}(1 - p_0)$

**Tiempos medios de espera.**

En fila:  $W_f = \frac{L_f}{\lambda_e} = \frac{L_f}{\lambda(M-L)} = \frac{L_f}{\mu(1-p_0)}$

En servicio:  $W_s = \frac{L_s}{\lambda_e} = \frac{1-p_0}{\lambda(M-L)} = \frac{1}{\mu}$

En el sistema:  $W = \frac{L}{\lambda_e} = \frac{L}{\lambda(M-L)} = \frac{L}{\mu(1-p_0)}$

Tasa efectiva de llegada:  $\lambda_e = \lambda(M - L) = \mu(L - L_f) = \mu(1 - p_0)$

## Modelo (M/M/s):(G/∞/M), s > 1.

### Tiempos entre llegadas y de servicio exponenciales, s servidores, capacidad de fila infinita, población de clientes finita tamaño M.

Factor de utilización:  $\rho = (\lambda/\mu)$  (puede tomar cualquier valor).

#### Probabilidades de estado estable.

Probabilidad de que no haya clientes en el sistema:

$$p_0 = \left[ \sum_{k=0}^{s-1} \binom{M}{k} (\lambda/\mu)^k + \sum_{k=s}^M \binom{M}{k} \frac{k!}{s!s^{k-s}} (\lambda/\mu)^k \right]^{-1}$$

Probabilidad de que haya  $n$  clientes en el sistema ( $n=0,1,2,\dots$ ):

$$p_n = \begin{cases} \binom{M}{n} (\lambda/\mu)^n p_0 & \text{si } 0 \leq n < s \\ \binom{M}{n} \frac{n!}{s!s^{n-s}} (\lambda/\mu)^n p_0 & \text{si } s \leq n \leq M \\ 0 & \text{si } n > M \end{cases}$$

#### Número medio de clientes.

En fila:  $L_f = L - s + \left[ \sum_{k=0}^{s-1} (s-k) \binom{M}{k} (\lambda/\mu)^k \right] p_0$

En servicio:  $L_s = L - L_f = s - \left[ \sum_{k=0}^{s-1} (s-k) \binom{M}{k} \left(\frac{\lambda}{\mu}\right)^k \right] p_0$

En el sistema:  $L = \left[ \sum_{k=0}^{s-1} k \binom{M}{k} \left(\frac{\lambda}{\mu}\right)^k + \frac{1}{s!} \sum_{k=s}^M k \binom{M}{k} \frac{k!}{s^{k-s}} \left(\frac{\lambda}{\mu}\right)^k \right] p_0$

#### Tiempos medios de espera.

En fila:  $W_f = \frac{L_f}{\lambda_e} = \frac{L_f}{\lambda(M-L)}$

En servicio:  $W_s = \frac{L_s}{\lambda_e} = \frac{L_s}{\lambda(M-L)} = \frac{1}{\mu}$

En el sistema:  $W = \frac{L}{\lambda_e} = \frac{L}{\lambda(M-L)}$

Tasa efectiva de llegada:  $\lambda_e = \lambda(M-L) = \mu(L-L_f)$ .

## Modelo (M/M/∞).

Autoservicio. Tiempos entre llegadas y de servicio exponenciales.  
Cada cliente es un servidor: El número de servidores es infinito.

### Probabilidades de estado estable.

Probabilidad de que no haya clientes en el sistema:

$$p_0 = e^{-\lambda/\mu}$$

Probabilidad de que haya  $n$  clientes en el sistema ( $n=0,1,2,\dots$ ):

$$p_n = \frac{e^{-\lambda/\mu} \cdot \lambda/\mu}{n!}$$

### Número medio de clientes.

En fila:  $L_f = 0$

En servicio:  $L_s = \lambda/\mu$

En el sistema:  $L = \lambda/\mu$

### Tiempos medios de espera.

En fila:  $W_f = 0$

En servicio:  $W_s = \frac{1}{\mu}$

En el sistema:  $W = \frac{1}{\mu}$