El azar y la probabilidad. Un enfoque elemental

Experimentos al azar

El azar puede percibirse fácilmente cuando se repite muchas veces una acción cuyo resultado no conocemos, como tirar dados, repartir naipes que han sido bien barajados, girar una ruleta.

El estudio sistemático del azar comenzó en el siglo diez y siete, con Pierre de Fermat y Blaise Pascal, precisamente para explicar cómo funcionaban los juegos de azar.

Después se trasladó a otros campos, y en la actualidad tiene poco que ver con los juegos de azar.

Una acción que puede tener varios resultados posibles, se denomina experimento al azar, si resultado exacto no se conoce de antemano.

A pesar que no se puede conocer el resultado exacto de un experimento al azar, existe un patrón a largo plazo y puede ser descrito de alguna manera.

Incluso ahora el azar no sólo se asocia a experimentos que pueden repetirse muchas veces, sino que también a cosas que van a ocurrir una sola vez, y que nunca de van a repetir.

En tales casos, el azar se refiere a nuestra ignorancia acerca de cómo se va a comportar el experimento. Por ejemplo, si el equipo de futbol de nuestro país se va a clasificar para el próximo campeonato mundial. Por mucho que sepamos de futbol, no podemos predecir el resultado. Esa ignorancia nuestra, acerca de este experimento, la denominamos azar.

El siguiente es el vocabulario que se usa, en relación a la probabilidad:

Un evento es una colección de posibles resultados de un experimento.

Por ejemplo, si se lanza una moneda, se pueden definir los siguientes eventos:

{cara}, {sello}, {cara,sello} {nada}

La frecuencia de un evento es el número de veces que se repite el evento, en una secuencia de repeticiones del experimento.

La frecuencia relativa de un evento es la proporción de repeticiones del experimento en que se produce el evento. O sea, es la frecuencia del evento, dividida por el total de veces que se hizo el experimento. Tiene valores entre 0 y 1.

Dos eventos son excluyentes si no pueden darse ambos a la vez. Si se cumple uno, el otro no puede cumplirse. Por ejemplo el evento "hoy a las 12:00 estaré en Santiago" y el evento "hoy a las 12:00 estaré en Concepción" son excluyentes: No puedo estar a la misma hora en ambos lugares, podría estar sólo en uno, o bien podría no estar en ninguno de los dos. Pero el evento "Juan está andanto en bicicleta" y el evento "Juan está masticando chicle" no son excluyentes, pues podrían ser verdaderos ambos a la vez.

Un conjunto de eventos son exhaustivos si hay total seguridad que al menos uno de ellos tiene que ser verdadero. Por ejemplo, dos eventos tales que uno es la negación del otro, son siiempres exhaustivo, como los eventos "Jorge es chileno" y "Jorge no es chileno". Uno de los dos es verdadero necesariamente. En este caso, además son excluyentes, pues no pueden los dos eventos ser verdaderos a la vez. Si se lanza un dado y registramos el resultado, los eventos {2,6}, {4,5,6}, {1,3,5} son exhaustivos, pues necesariamente alguno de ellos va a ser verdadero. Se puede observar que no son excluyentes.

La probabilidad

Cuando vamos a efectuar algún experimento, hay resultamos sobre los que tenemos más seguridad de que van a ocurrir, y eventos sobre los que tenemos una idea de que es dificil que ocurran. Esto se puede cuantificar, y para ello definimos una escala de medida de nuestro grado de nuestro grado de seguridad que tenemos de que algún evento ocurra, que se llama probabilidad.

La probabilidad de un evento es una medida de la certeza de que el evento va a ocurrir.

La probabilidad se mide en una escala entre 0 y 1.

0 significa la certeza absoluta que no va a ocurrir el evento. 1 corresponde a la certeza absoluta de que va a ocurrir. Una probabilidad de 0.5 significa que es nuestra incertidumbre es igual respecto de que ocurra o no ocurra. Y de esta manera apodemos asignar probabilidades a eventos.

Entonces la probabilidad de un evento que tiene todos los resultados posibles, es uno, pues tenemos la seguridad de que alguno de los resultados va a cumplirse. Esta probabilidad se denomina <u>probabilidad total</u>.

Se pueden calcular probabilidades de la siguiente forma: Si A es un evento, la probabilidad de A es

$$\operatorname{Pr} ob(A) = \frac{\text{Número de posibilidades favorables a } A}{\text{Número total de posibilidades}}$$

Supongamos que tenemos un conjunto de eventos que son excluyente y a la vez exhaustivos. Entonces tienen la propiedad de que la suma de sus probabilidades es igual a 1. Esto significa precisamente que tenemos la seguridad de que uno de ellos se va a cumplir.

<u>Ejemplos</u>:

1) En el lanzamiento de dados, las posibilidades son dos: cara, sello.

Entonces probabilidad del evento “cara” es ½, pues una posibilidad es favorable al evento cara, y hay dos en total.

El evento {cara, sello} tiene probabilidad 1, pues hay dos posibilidades a favor. Esto significa que siempre se va a cumplir este evento.

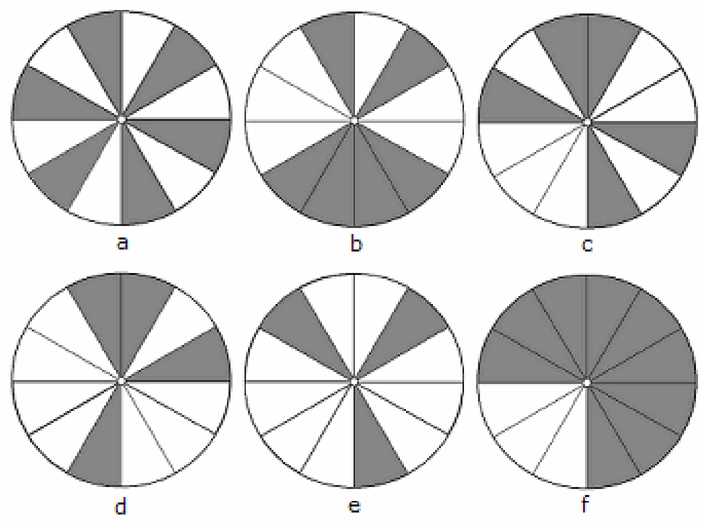
El evento {nada} tiene probabilidad cero. ¿Por qué?

2) Se lanza un dado. Tiene seis posibilidades. Por lo tanto, cada número tiene probabilidad 1/6.

El evento “par” tiene probabilidad 1/2, pues es igual a {2, 4, 6}, por lo tanto tiene tres posibilidades favorables, de la seis, y esto es 3/6 = 1/2.

El evento “mayor que dos” tiene probabilidad 2/3. ¿Por qué?

3) La siguientes figura muestra seis trompos. Cada uno de ellos se hace girar, y una vez que se detiene, se registra qué color sale apuntando hacia arriba, blanco o gris.



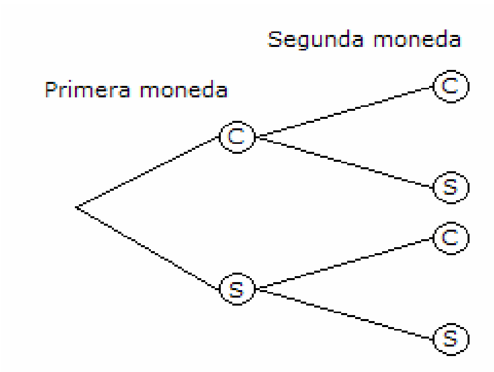
En el caso (a), la probabilidad de blanco es 6/12 = 1/2, pues hay seis posiciones que resultan blanco, de un total de 12 posiciones posibles.

En el caso (b) la probabilidad de blanco es también 1/2. En (c) es 7/12. ¿Cuáles son las probabilidades de salir blanco, en los casos (d), (e) y (f)?

Diagramas de arbol.

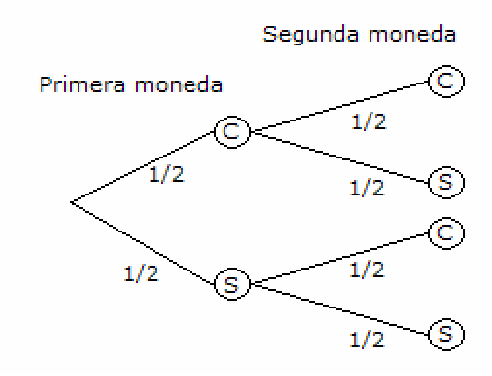
En asos más complejos, se pueden utilizar diagramas de arbol para calcular las probabilidades de diversos eventos.

Por ejemplo, si se lanzan dos monedas, el siguiente diagrama sirve para representar este experimento:

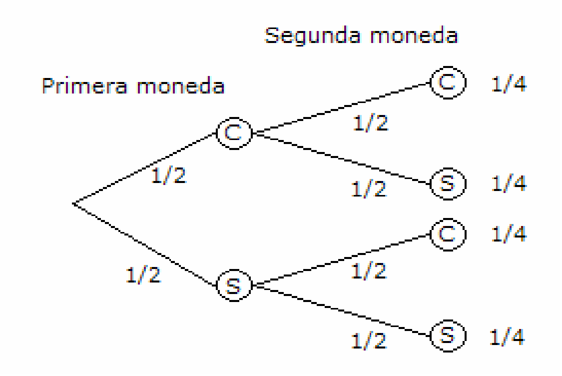


El primer lanzamiento de moneda tiene dos resultados posibles: Cara (C) o sello (S). Por cada uno de ellos hay los mismos dos resultados para el segundo lanzamiento, por lo tanto son cuatro las posibilidades: CC, CS, SC, SS. Estas están representadas por cuatro "rutas" en el diagrama de arbol.

La probabilidad de cara es 1/2, y la probabilidad de sellos también es 1/2. Agregamos estas probabilidades a las ramas:



Las probabilidades de cada una de las cuatro rutas se obtienen multiplicando las probabilidades de cada tramo que forma la ruta. Por ejemplo, la probabilidad de {cara,cara} es 1/2 x 1/2 = 1/4. De esa manera podemos calcular las probabilidades de las cuatro rutas, que son las que se muestran en el siguiente gráfico:



Estas se pueden sumar. Vemos que la suma total es 1, es decir, es seguro que alguna de ellas se va a cumplir. Más que eso, la suma de las probabilidades que aparecen una encima de la otra, siempres es 1. Eso se debe a que se tiene la certeza que uno de esos eventoa va a ocurrir.

La probabilidad del evento "un sello y una cara" corresponde a CS o SC, y es igual a 1/4 + 1/4 = 1/ 2. La probabilidad de "al menos una cara" corresponde a CC, CS o SC, y es igual a

1/4 + 1/4 + 1/4 = 3/4.

PREGUNTAS

(1) Un experimento al azar es

a) una acción que tiene un sólo resultado posible, pero que no conocemos.

b) un resultado que se repite muchas veces

c) una acción que puede tener varios resultados posibles, cuyo resultado exacto no se conoce de antemano.

d) un evento con una alta probabilidad de que se cumpla

e) Ninguna de las anteriores.

(2) Un evento es

a) un experimento al azar

b) una colección de posibles resultados de un experimento

c) el número de veces que se repite un resultado de un experimento

d) el conjunto de todos los resultados de un experimento

e) Ninguna de las anteriores.

(3) La probabilidad de un evento es

a) la frecuencia relativa del evento

b) el número de veces que se repite el evento

c) el hecho que el evento se va a cumplir

d) una medida de la certeza que tenemos de que el evento se va a realizar

e) Ninguna de las anteriores.

EJERCICIOS

(1) Una lotería tiene 10.000 boletos. Cada boleto vale $ 1.000 Los premios son:

1 de $ 5.000.000

2 de $ 500.000

5 de $ 100.000

20 de $10.000

Si compro un boleto,

a) ¿cuál es la probabilidad de obtener el premio de $ 5.000.000 ?

b) ¿cuál es la probabilidad de obtener un premio de $ 500.000 ?

c) ¿cuál es la probabilidad de obtener un premio de $ 100.000?

d) ¿cuál es la probabilidad de obtener un premio de $ 10.000?

e) Dibuje un gráfico de barras en que se representen probabilidades anteriores.

(2) Una caja contriene 12 fichas, numeradas del 1 al 12. Se extrae una ficha, al azar. ¿Cuál es la probabilidad de que la ficha tenga un número par, mayor que 5?

(3) Se lanzan 5 monedas.

a) Haga un diagrama de arbol que represente los lanzamientos de cada moneda. En cada caso anote el número de caras.

b) Construya una tabla en que aparecan todos los posibles números de caras, con sus respectivas probabilidades.

c) Dibuje un gráfico de barras que represente los valores de la tabla del punto b).

(4) Las probabilidades de que una estación de televisión reciba 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9 o más llamadas después de un programa polémico están dada por la tabla siguiente:

Número de llamadas	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9 o más
Probabilidad	0.01	0.03	0.07	0.15	0.19	0.18	0.14	0.12	0.09	0.02

a) Dibuje un gráfico de barras que represente estas probabilidades.

b) ¿Cuál es la probabilidad de que después de ese programa se reciban a lo más 4 llamadas?

c) ¿Cuál es la probabilidad de que se reciban al menos 6 llamadas?

c) ¿Cuál es la probabilidad de que se reciban de 5 a 8 llamadas?

(5) En una caja hay 4 baterías, de las cuales una es defectuosa.

Con el objeto de efctuar un control de calidad, se sacan dos baterías, al azar, y se prueban.

a) ¿Cuál es la probabilidad de obtener la defectuosa?

b) ¿Cuál es la probabilidad de no obtener la defectuosa?

(6) Una posta de primeros auxilios tiene un equipo biomecánico para emergencias médicas.

Este equipo puede usarse 0, 1 o dos veces por noche.

La probabilidad de que no se use en una noche es 0.2.

La probabilidad de que se use una vez en una noche es 0.6.

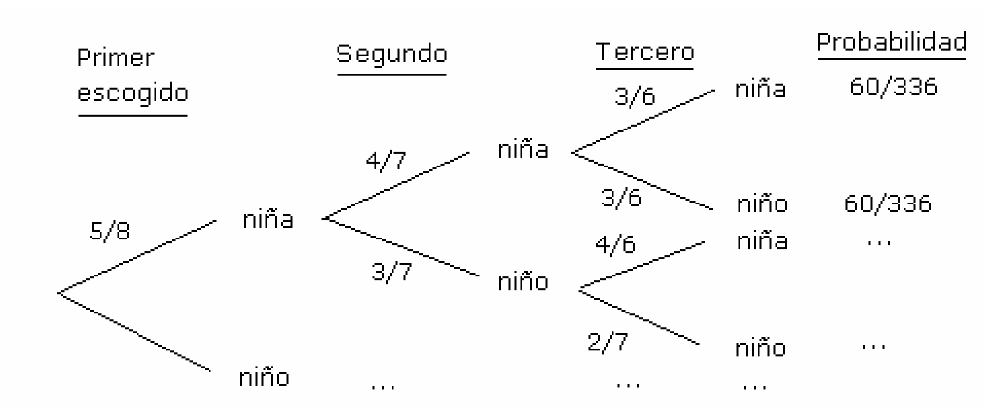
La probabilidad de que se usedos veces en una noche es 0.3.

¿Cómo cree que se obtuvieron estas probabilidades?
Calcule las probabilidades de que en dos noches seguidas, no se use, se use una vez, dos veces, tres veces, cuatro veces.
Construya una tabla con estas probailidades y construya un gráfico de barras para representarlas. ¿Qué observa?

(7) Considere la siguiente situación: Una matrimonio desea tener una hija mujer. Elabora la siguiente estrategia:
Tener un primer hijo.
Si es mujer, no va a tener más, si es hombre, tener un segundo.
Si es mujer, parar allí, si es hombre, tener un tercero.
Si es mujer, parar, si es hombre, tener un cuarto y último.
Calcule las probabilidades de que, al final, el matrimonio tenga
a) al menos una hija,
b) no tenga ninguna hija,
c) tenga dos hijos varones.

(8) Se tiene un curso compuesto por 5 niñas y 3 niños. Se sortean tres, al azar, para integrar una comisión encargada del ornato de la sala de clases.
¿Cual es la probabilidad de que en el grupo salgan dos niñas y un niño?

Ayuda: Dibuje un diagrama der arbol que represente los tres escogidos, con las respectivas probabilidades, como se muestra a continuación:



(9) Se lanzan dos dados. ¿Cuál es la probabilidad de que la suma de los números sea 7?

<u>Ayuda</u>: Construya una tabla, en que en un lado aparecen los resultados de un dado, en la parte superior los resultados del otro, y en el centro todas las sumas posibles:

		Dado 2					
		1	2	3	4	5	6
	1	2	3	4	...		
	2	3	4	5	...		
	3	...					
Dado 1	4			sumas			
	5						
	6						