

# CORRELACIONES CANONICAS

Jorge Galbiati R.

Se tienen dos vectores aleatorios  $\underline{x}_{q \times 1}$  e  $\underline{y}_{p \times 1}$  que representan dos conjuntos de características observadas, posiblemente de un mismo sujeto.

Interesa conocer una medida de asociación entre ellos, similar al coeficiente de correlación entre dos variables.

Se consideran dos combinaciones lineales de las coordenadas de los vectores,  $\eta = \underline{a}'\underline{x}$  y  $\varsigma = \underline{b}'\underline{y}$

Supóngase que la matriz de varianzas-covarianzas conjunta del vector formado por  $\underline{x}$  e  $\underline{y}$  particionada correspondiente es:

$$Var \begin{pmatrix} \underline{x} \\ \underline{y} \end{pmatrix} = \begin{bmatrix} \Sigma_{11} & \Sigma_{12} \\ \Sigma_{21} & \Sigma_{22} \end{bmatrix}_{(q+p) \times (q+p)}$$

Entonces:

$$corr(\eta, \varsigma) = corr(\underline{a}'\underline{x}, \underline{b}'\underline{y}) = \frac{cov(\underline{a}'\underline{x}; \underline{b}'\underline{y})}{\sqrt{Var(\underline{a}'\underline{x})Var(\underline{b}'\underline{y})}} = \frac{\underline{a}'\Sigma_{12}\underline{b}'}{\sqrt{\underline{a}'\Sigma_{11}\underline{a}\underline{b}'\Sigma_{22}\underline{b}}} \quad (1)$$

Se define la *Correlación Canónica* entre los vectores  $\underline{x}$  e  $\underline{y}$  al número  $corr(\underline{a}'\underline{x}, \underline{b}'\underline{y})$  máximo con respecto de  $\underline{a}$  y  $\underline{b}$ .

Por lo tanto, nuestro problema es encontrar los vectores  $\underline{a}$  y  $\underline{b}$  que maximicen (1).

Pero la expresión anterior resulta invariante respecto de la magnitud de  $\underline{a}$  y de  $\underline{b}$ . Luego el problema es equivalente a maximizar

$$cov(\underline{a}'\underline{x}; \underline{b}'\underline{y})$$

sujeto a las restricciones

$$\underline{a}'\Sigma_{11}\underline{a} = 1 \quad \text{y} \quad \underline{b}'\Sigma_{22}\underline{b} = 1$$

Esto se hace igualando las derivadas parciales a cero, de la función a maximizar con multiplicadores de Lagrange asociado a las dos restricciones.

Se puede hacer de esta forma porque la función a maximizar es de segundo grado en los elementos de  $\underline{a}$  y de  $\underline{b}$ .

Función a derivar:

$$\Phi(\underline{a}', \underline{b}) = \underline{a}'\Sigma_{12}\underline{b} + \lambda_1(\underline{a}'\Sigma_{11}\underline{a} - 1) - \lambda_2(\underline{b}'\Sigma_{22}\underline{b} - 1)$$

$\lambda_1$  y  $\lambda_2$  son multiplicadores de Lagrange.

Derivadas parciales:

$$\frac{\partial\Phi}{\partial\underline{a}} = \Sigma_{12}\underline{b} + 2\lambda_1\Sigma_{11}\underline{a} = 0$$

$$\frac{\partial\Phi}{\partial\underline{b}} = \Sigma_{21}\underline{a} + 2\lambda_2\Sigma_{22}\underline{b} = 0$$

$$\frac{\partial\Phi}{\partial\lambda_1} = \underline{a}'\Sigma_{11}\underline{a} - 1 = 0$$

$$\frac{\partial\Phi}{\partial\lambda_2} = \underline{b}'\Sigma_{22}\underline{b} - 1 = 0$$

Combinando adecuadamente estas ecuaciones, se llega a:

$$\Sigma_{11}^{-1}\Sigma_{12}\Sigma_{22}^{-1}\Sigma_{21}\underline{a} = (\underline{a}'\Sigma_{12}\underline{b})^2\underline{a}$$

$$\Sigma_{22}^{-1}\Sigma_{21}\Sigma_{11}^{-1}\Sigma_{12}\underline{b} = (\underline{a}'\Sigma_{12}\underline{b})^2\underline{b}$$

Por lo tanto,  $\underline{a}$  y  $\underline{b}$  son vectores propios de:

$$M_1 = \Sigma_{11}^{-1}\Sigma_{12}\Sigma_{22}^{-1}\Sigma_{21}$$

$$\text{y } M_2 = \Sigma_{22}^{-1}\Sigma_{21}\Sigma_{11}^{-1}\Sigma_{12}$$

respectivamente.

El valor de la correlación canónica es:  $\underline{a}'\Sigma_{12}\underline{a}$

La raíz cuadrada del mayor valor propio común  $\lambda_1$  de estas matrices.

La definición de correlación canónica se puede extender:

Si  $\lambda_r$  es el r-esimo valor propio de  $M_1$  (o de  $M_2$ ), en orden de magnitud de mayor a menor, entonces  $\sqrt{\lambda_r}$  es la r-esima correlación canónica entre  $\underline{x}$  e  $\underline{y}$ .

Los valores propios asociados a  $\lambda_r$  de  $M_1$  y  $M_2$ ,  $\underline{a}_r$  y  $\underline{b}_r$ , respectivamente, son los r-esimos vectores de correlación, tales que la correlación acnónica r-esima está dada por:

$$\text{corr}(\underline{a}'_r \underline{x}; \underline{b}'_r \underline{y}) = \sqrt{\lambda_r}$$

Propiedades:

- 1)  $\sqrt{\lambda_1}$  es la mayor correlación canónica entre  $\underline{x}$  e  $\underline{y}$
- 2) Si  $r \neq s$ ,  $\underline{a}'_r \Sigma_{12} \underline{b}'_s = 0$

### Caso muestral

Si se tienen dos matrices de datos provenientes de  $\underline{x}$  e  $\underline{y}$ ,  $X_{n \times q}$  e  $Y_{n \times p}$

Se pueden obtener correlaciones canónicas muestrales a partir de la matriz de varianzas-covarianzas muestral

$$S = \begin{bmatrix} S_{11} & S_{12} \\ S_{21} & S_{22} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} X'HX & X'HY \\ Y'HX & Y'HY \end{bmatrix} \quad \text{con } H = I_n - \frac{1}{n} \mathbf{1}_n \mathbf{1}'_n$$

Lo demás sigue en forma análoga.

### EJEMPLO:

Suponga que  $q = p = 2$ , y la matriz de varianzas-covarianzas muestral es:

$$S = \left[ \begin{array}{cc|cc} 2 & 2 & 1 & 0 \\ 2 & 3 & 2 & 1 \\ \hline - & - & - & - \\ 1 & 2 & 4 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 2 \end{array} \right]$$

Se calculan las matrices  $M_1$  y  $M_2$ , ambas  $2 \times 2$ ,

$$M_1 = S_{11}^{-1} S_{12} S_{22}^{-1} S_{21}$$

$$M_2 = S_{22}^{-1} S_{21} S_{11}^{-1} S_{12}$$

donde:

$$S_{11}^{-1} = \frac{1}{2} \begin{bmatrix} 3 & -2 \\ -2 & 2 \end{bmatrix} \quad S_{22}^{-1} = \frac{1}{7} \begin{bmatrix} 2 & -1 \\ -1 & 4 \end{bmatrix}$$

de donde:

$$M_1 = \frac{1}{14} \begin{bmatrix} 0 & -7 \\ 2 & 10 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & -0,5 \\ 0,143 & 0,714 \end{bmatrix} \quad M_2 = \frac{1}{14} \begin{bmatrix} 4 & 2 \\ 5 & 6 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0,286 & 0,143 \\ 0,357 & 0,429 \end{bmatrix}$$

Los valores propios comunes de  $M_1$  y  $M_2$  son:

$$\lambda_1 = \frac{5 + \sqrt{11}}{14} = 0,594 \quad \lambda_2 = \frac{5 - \sqrt{11}}{14} = 0,120$$

Luego las correlaciones canónicas son:

$$\sqrt{\lambda_1} = 0,7707 \quad y \quad \sqrt{\lambda_2} = 0,3468$$

Los vectores de correlación canónica asociados al primer valor propio son:

$$\underline{a}_1 = \begin{bmatrix} -0,644 \\ 0,765 \end{bmatrix} \quad y \quad \underline{b}_1 = \begin{bmatrix} -0,972 \\ 0,234 \end{bmatrix}$$

y al segundo valor propio (segunda correlación canónica).

$$\underline{a}_2 = \begin{bmatrix} 0,420 \\ 0,907 \end{bmatrix} \quad y \quad \underline{b}_2 = \begin{bmatrix} 0,654 \\ -0,757 \end{bmatrix}$$

de  $M_1$  y  $M_2$ , respectivamente.

La primera correlación canónica entre los pares de variables es 0,7704, la segunda correlación canónica es 0,3468.